

# Zmiana strukturalna

## Wykład 2

Piotr Dybka

Ekonometria praktyczna

# Czym jest zmiana strukturalna?

Gdy mamy model:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \epsilon_i$$

to za pomocą  $\beta_k$  oznaczamy szukane parametry strukturalne modelu, które informują nas o tym, jaki jest wpływ danej zmiennej  $x_{ki}$  na badaną zmienną zależną.

**Zmiana strukturalna** oznacza sytuację, w której następuje zmiana wartości parametru  $\beta_k$  w rzeczywistym procesie generującym dane. Jej przyczyną mogą być zmiany w systemie gospodarczym (np. zmiany rynkowe), interwencja (np. zmiana polityki gospodarczej), zmiana przepisów prawa itp.

# Ilustracja: zmiana wyrazu wolnego $\beta_0$

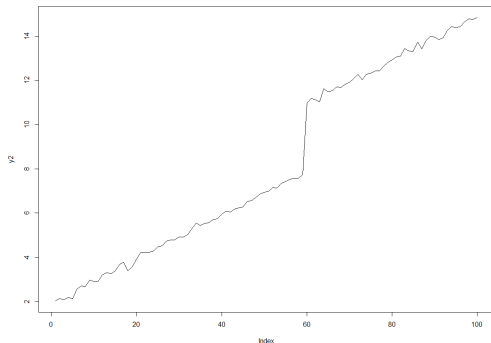
Szereg generowany jako

$$y_i = 2 + 0,1 x_i + \epsilon_i$$

a od obserwacji 60:

$$y_i = 5 + 0,1 x_i + \epsilon_i$$

Zmienia się **poziom** szeregu, ale nachylenie pozostaje takie samo – widoczny jest jednorazowy skok.



# Ilustracja: zmiana nachylenia $\beta_1$

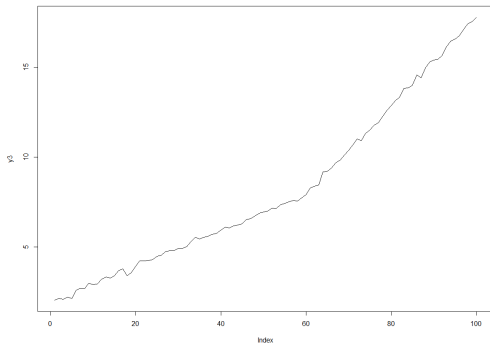
Szereg generowany jako

$$y_i = 2 + 0,1 x_i + \epsilon_i$$

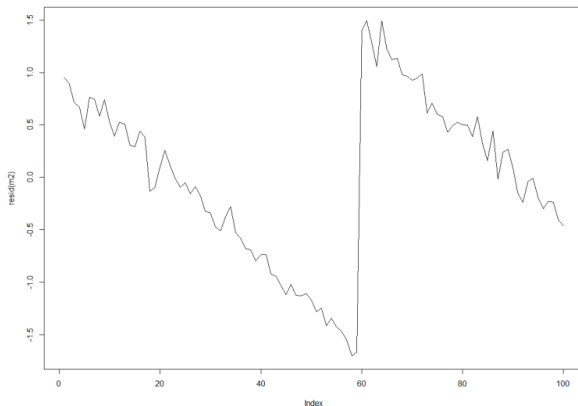
a od obserwacji 60:

$$y_i = -6,9 + 0,25 x_i + \epsilon_i$$

Tym razem zmienia się **tempo wzrostu**. Stała została dobrana tak, aby szereg pozostał ciągły – moment zmiany jest więc dużo trudniejszy do zauważenia „gołym okiem”.

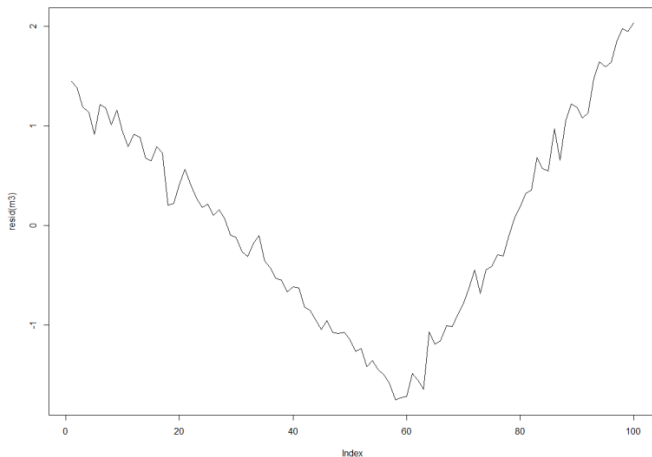


# Skutki zmiany strukturalnej – przykład 1 ( $\beta_0$ )



Część „efektu” zmiany parametru  $\beta_0$  została uwzględniona przez oszacowania parametrów  $\beta_k$  – stąd wyraźny trend spadkowy w resztach, „złamany” w miejscu wystąpienia zmiany strukturalnej. Taka sytuacja oznacza, że estymator jest **obciążony** (pominięcie istotnej zmiennej – mierzącej zmianę strukturalną).

# Skutki zmiany strukturalnej – przykład 2 ( $\beta_1$ )



Zmiana kierunku trendu widocznego w resztach jest skutkiem „uśrednienia” wartości współczynnika  $\beta_1$ : przed zmianą strukturalną mamy zawyżony współczynnik (i reszty malejące), a po zmianie strukturalnej współczynnik jest заниżony (i reszty rosną).

# Zmiana strukturalna – zapis formalny

Zmianę strukturalną możemy przedstawić formalnie jako sytuację, gdy:

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \epsilon_i & \text{dla } S_i = 0 \\ y_i = \beta'_0 + \beta'_1 x_{1i} + \dots + \beta'_K x_{Ki} + \epsilon_i & \text{dla } S_i = 1 \end{cases}$$

- Gdzie  $S_i$  to zmienna informująca, czy dla danej obserwacji wystąpiła zmiana strukturalna, przy czym  $\beta_0 \neq \beta'_0$ ,  $\beta_1 \neq \beta'_1$  itd.
- Taki zapis modelu pokazuje nam najprostszy sposób testowania i uwzględniania występowania zmiany strukturalnej. Powyższy model możemy zapisać także w postaci:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_K x_{Ki} + \gamma_0 S_i + \gamma_1 (S_i x_{1i}) + \dots + \gamma_K (S_i x_{Ki}) + \epsilon_i$$

- Co oznacza, że  $\beta'_0 = \beta_0 + \gamma_0$ ,  $\beta'_1 = \beta_1 + \gamma_1$  itd.

# Test Chowa

- Aby sprawdzić stabilność parametrów (brak zmiany strukturalnej), możemy wykorzystać test Chowa.
- Wykonanie testu wymaga **określenia punktu**, w którym zmiana strukturalna występuje – np. za pomocą analizy reszt z modelu.
- Test Chowa może być także wykorzystywany do danych przekrojowych! Określenie punktu zmiany strukturalnej może wtedy wymagać zmiany uporządkowania danych (według cechy, dla której taka zmiana mogła nastąpić).

1. Dzielimy próbę na dwie podpróby (zgodnie z tym, gdzie przewidujemy możliwość wystąpienia zmiany strukturalnej).
2. Tworzymy zmienną  $S_i$ , która przyjmuje wartości 0 i 1 odpowiednio w dwóch podpróbach.
3. Szacujemy rozszerzony model:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \gamma_0 S_i + \gamma_1 (S_i x_{1i}) + \cdots + \gamma_K (S_i x_{Ki}) + \epsilon_i$$

4. Weryfikujemy hipotezę  $H_0 : \gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_K = 0$  za pomocą statystyki

$$F = \frac{(SSE_R - SSE_U)/(K + 1)}{SSE_U/(N - 2(K + 1))}$$

5. Rozkład  $F_{(K+1, N-2(K+1))}$ ; odrzucamy  $H_0$ , jeżeli  $F \geq F_c$

gdzie  $SSE_R$  i  $SSE_U$  to sumy kwadratów reszt z modelu z restrykcjami ( $\gamma_k = 0$ ) i **bez restrykcji**.

# Test Chowa – wersja alternatywna

- 1 Dzielimy próbę na dwie podpróby (zgodnie z tym, gdzie przewidujemy możliwość wystąpienia zmiany strukturalnej).
- 2 Szacujemy dwa modele na podstawie dwóch podprób (aby otrzymać wektory parametrów  $\beta$  i  $\beta'$ ) i obliczamy reszty z tych modeli  $e_{Uj}$ .
- 3 Szacujemy model na pełnej próbie i obliczamy reszty z modelu  $e_{Ri}$ .
- 4 Obliczamy  $SSE_R = \sum_i e_{Ri}^2$  oraz  $SSE_U = \sum_i e_{Ui}^2$  (tutaj sumujemy reszty z dwóch modeli oszacowanych dla podprób).
- 5 Weryfikujemy hipotezę:

$$H_0 : \beta = \beta'$$
$$F = \frac{(SSE_R - SSE_U)/(K + 1)}{SSE_U/(N - 2(K + 1))}$$

- 6 Rozkład  $F_{(K+1, N-2(K+1))}$
- 7 Odrzucamy  $H_0$ , jeżeli  $F \geq F_c$

Obie wersje dają **identyczną** wartość statystyki  $F$  – różnią się tylko sposobem obliczeń.

# A jeżeli nie znamy momentu zmiany?

- Test Chowa wymaga wskazania momentu zmiany z *góry*. Jeżeli wybierzemy go, patrząc wcześniej na dane, to rzeczywisty poziom istotności testu jest wyższy niż deklarowany.
- **Test fluktuacji** sprawdza stabilność parametrów w całej próbie, nie wskazując punktu: w R `sctest(model)`.
- **Procedura Bai-Perrona** traktuje moment zmiany jako *parametr do oszacowania* – szukamy podziału próby minimalizującego sumę kwadratów reszt:

$$(\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_m) = \arg \min_{\tau_1, \dots, \tau_m} \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{i=\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_j)^2$$

- Liczbę załamań  $m$  wybieramy kryterium informacyjnym (BIC).
- W R: `breakpoints(y~x)` z pakietu `strucchange`; `confint()` podaje przedział ufności dla *daty* zmiany, a `breakdates()` – oszacowany moment.

# Modelowanie zmiany strukturalnej

Uwzględnianie zmiany strukturalnej w modelu można prowadzić na dwa sposoby. Pierwszy z nich to sytuacja, gdy naszym celem jest jak najlepsze dopasowanie modelu do danych (np. w celu prognostycznym):

- ➊ Dodanie zmiennych binarnych (i interakcji), tak jak w teście Chowa.
- ➋ Modele progowe (np. threshold VAR, STAR).
- ➌ Modele przełącznikowe (np. Markov switching, dla wariancji – (MS)GARCH).
- ➍ Modele ze zmiennymi parametrami w czasie (np. estymacja za pomocą filtru Kalmana).

Natomiast w drugim przypadku naszym celem może być dokładne zmierzenie efektu zmiany strukturalnej. W szczególności dotyczy to sytuacji, gdy zmiana jest spowodowana określonym działaniem – np. zmianą polityki gospodarczej, opakowania produktu, sposobu udostępniania usługi itp.:

- ➊ Estymator difference-in-differences
- ➋ Regression discontinuity design
- ➌ Metody ekonomii eksperymentalnej

# Dodawanie zmiennych binarnych

- Jest to najprostszy sposób na uwzględnienie zmiany strukturalnej. Taki model możemy zapisać w postaci:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_K x_{Ki} + \gamma_0 S_i + \gamma_1 (S_i x_{1i}) + \cdots + \gamma_K (S_i x_{Ki}) + \epsilon_i$$

- Wadą tego podejścia jest to, że musimy określić, dla których obserwacji i których zmiennych nastąpiła zmiana strukturalna, aby poprawnie skonstruować zmienne binarne  $S_i$ .
- Jeżeli zmienia się tylko wyraz wolny, wystarczy sama zmienna  $S_i$ ; jeżeli zmienia się nachylenie – potrzebne są interakcje  $S_i x_{ki}$ .

# Model progowy na przykładzie modelu AR

- Jako **przykład** modelu progowego omówimy modyfikacje modelu autoregresyjnego:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \cdots + \beta_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

- Rozszerzmy zatem nasz model autoregresyjny do postaci modelu progowego TAR (*Threshold Autoregressive model*):

$$y_t = \begin{cases} \beta_{10} + \beta_{11} y_{t-1} + \cdots + \beta_{1p} y_{t-p} + \epsilon_{1t}, & \text{dla } S_{t-d} < r \\ \beta_{20} + \beta_{21} y_{t-1} + \cdots + \beta_{2p} y_{t-p} + \epsilon_{2t}, & \text{dla } S_{t-d} \geq r \end{cases}$$

- Gdzie  $S$  to szereg decydujący o tym, w jakim reżimie znajduje się obserwacja,  $d$  to parametr opóźnienia, a  $r$  to wartość progowa, dla której następuje zmiana reżimu.
- $S$  to może być dowolny szereg, ale jeżeli potraktujemy  $y_t$  jako  $S$ , to otrzymamy model SETAR (*Self-Exciting Threshold Autoregressive model*):

$$y_t = \begin{cases} \beta_{10} + \beta_{11} y_{t-1} + \cdots + \beta_{1p} y_{t-p} + \epsilon_{1t}, & \text{dla } y_{t-d} < r \\ \beta_{20} + \beta_{21} y_{t-1} + \cdots + \beta_{2p} y_{t-p} + \epsilon_{2t}, & \text{dla } y_{t-d} \geq r \end{cases}$$

# Model STAR

- Istnieją też dalsze rozszerzenia modelu SETAR. Model autoregresyjny możemy zapisać w postaci wektorowej:

$$y_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta} + \epsilon_t$$

- Gdzie  $\mathbf{X}_t$  to wektor kolejnych opóźnień zmiennej objaśnianej ( $1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p}$ ), a następnie rozszerzyć do modelu STAR (*Smooth Transition Autoregression*):

$$y_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta}_2 F(y_{t-d}, \lambda, r) + \epsilon_t$$

- Gdzie  $F(y_{t-d}, \lambda, r)$  to funkcja przejścia (z jednego reżimu do drugiego), przyjmująca wartości od 0 do 1. Parametr  $\lambda$  decyduje o „łagodności” przejścia pomiędzy reżimami, a  $r$  to wartość progowa. Dla  $F = 0$  obowiązuje  $\boldsymbol{\beta}_1$ , dla  $F = 1 - \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ .

Możliwe warianty:

- Logistic smooth transition autoregression (LSTAR)

$$F(y_{t-d}, \lambda, r) = \left(1 + e^{-\lambda(y_{t-d}-r)}\right)^{-1}, \quad \lambda > 0$$

- Exponential smooth transition autoregression (ESTAR)

$$F(y_{t-d}, \lambda, r) = 1 - e^{-\lambda(y_{t-d}-r)^2}, \quad \lambda > 0$$

# Model przełącznikowy

- Modele przełącznikowe różnią się od modeli progowych tym, że zmiana reżimu nie zależy od przekroczenia progu wartości, lecz jest opisana **prawdopodobieństwem**. Przykładem takich modeli mogą być przełącznikowe modele Markowa (*Markov switching models*), opierające się na łańcuchach Markowa.
- Łańcuch Markowa to proces stochastyczny  $y_t$ , który spełnia warunek Markowa:

$$P(y_t = j \mid y_0 = i_0, y_1 = i_1, \dots, y_{t-1} = i_{t-1}) = P(y_t = j \mid y_{t-1} = i_{t-1})$$

- Dla każdego  $t \in N$  oraz dla dowolnych  $i, j \in S$ , gdzie  $S = \{1, 2, \dots, r\}$  jest zbiorem wszystkich stanów fazowych tego procesu.
- Innymi słowy: zachowanie procesu w bieżącym okresie zależy tylko i wyłącznie od jego stanu w poprzednim okresie.
- Natomiast prawdopodobieństwo warunkowe przejścia ze stanu  $i$  do stanu  $j$  w danym momencie to:

$$p_{ij}(t) = P(y_t = j \mid y_{t-1} = i)$$

- Prawdopodobieństwa  $p_{ij}(t)$  tworzą macierz  $\mathbf{P}(t) = [p_{ij}(t)]_{r \times r}$  spełniającą warunki:

$$\forall t \in N \quad \forall i, j \in S \quad p_{ij}(t) \geq 0 \qquad \forall t \in N \quad \forall i \in S \quad \sum_j p_{ij}(t) = 1$$

# Model przełącznikowy

- Jeżeli prawdopodobieństwa przejścia nie zależą od  $t$  ( $\forall_{t \in N} p_{ij}(t) = p_{ij}$ ), to mamy do czynienia z jednorodnym łańcuchem Markowa, gdzie  $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{r \times r}$  jest macierzą prawdopodobieństw przejścia. Wówczas spełniona jest zależność:

$$\mathbf{D}_t = \mathbf{D}_{t-1} \mathbf{P}, \quad \mathbf{D}_t = [d_{1t}, d_{2t}, \dots, d_{rt}], \quad d_{it} = P(y_t = i)$$

- Którą można przedstawić jako model ekonometryczny postaci:

$$y_t = \begin{cases} y_{1t}, & \text{dla } s_t = 1 \\ y_{2t}, & \text{dla } s_t = 2 \\ \dots & \\ y_{rt}, & \text{dla } s_t = r \end{cases}$$

- Gdzie  $s_t$  jest **nieobserwowanym** stanem jednorodnego łańcucha Markowa o  $r$  stanach (reżimach) i macierzy przejścia  $\mathbf{P}$ .
- Przykład.** Jeżeli założymy, że procesy cząstkowe  $y_{it}$  tworzące cały proces  $y_t$  są procesami autoregresyjnymi o  $r$  stanach i rzędzie opóźnień  $p$ :

$$y_t = \mu(s_t) + \beta_1 (y_{t-1} - \mu(s_{t-1})) + \dots + \beta_p (y_{t-p} - \mu(s_{t-p})) + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2(s_t))$$

- Procesem „przełączającym się” w ramach modelu może być wartość oczekiwana  $\mu(s_t)$ , parametry autoregresyjne  $\beta_j$  lub wariancja składnika losowego  $\sigma^2(s_t)$ .