
SKRYPT FO PRZEDMIOTU
MODELOWANIE RYZYKA FINANSOWEGO Z R

AUTORZY:

MICHAŁ RUBASZEK

MAREK KWAS

Zakład Modelowania Rynków Finansowych

Instytut Ekonometrii SGH

2020

SZKOŁA GŁÓWNA HANDLOWA W WARSZAWIE

Spis treści

1	Wprowadzenie	1
2	Finansowe szeregi czasowe	7
3	Proste modele ryzyka	19
4	Grupowanie zmienności	33
5	VaR i ES dla dalszych horyzontów	45
6	Testy warunków skrajnych	55
7	Backtesting	63

Wstęp

Ten skrypt zawiera materiały przygotowane w celu prowadzenia przedmiotu *Modelowanie Ryzyka Finansowego z R*.

Zajęcia są prowadzone z wykorzystaniem:

- darmowego pakietu ekonometrycznego R:
<https://www.r-project.org/>
- plików z danymi umieszczonych na stronie przedmiotu:
<http://web.sgh.waw.pl/~mrubas/>

Jako opracowania rozszerzające / uzupełniające, polecamy:

- Jon Danielsson 2011. “Financial Risk Forecasting”, Wiley
<https://www.financialriskforecasting.com/>
- Alexander C., 2009. “Market Risk Analysis”, Wiley

Temat 1

Wprowadzenie

- Zasady zaliczenia przedmiotu
- Materiały dodatkowe
- Pakiet R

Zakres / cele spotkań

Blok 1

1. Zapoznanie z charakterystykami finansowych szeregów czasowych
2. Omówienie modeli finansowych szeregów czasowych
3. Prezentacja metod liczenia VaR

Blok 2

1. Backtesting modeli
2. Testy warunków skrajnych

Dodatkowo

1. Programowanie w pakiecie R
2. Umiejętność przygotowania i prezentacji raportu

Literatura

Podstawowe materiały:

- Prezentacje
- Kody R

Dostępne na stronie przedmiotu, czyli:
web.sgh.waw.pl/~mrubas

Książki – pogłębienie wiedzy:

Danielsson J. 2011. Financial Risk Forecasting, Wiley

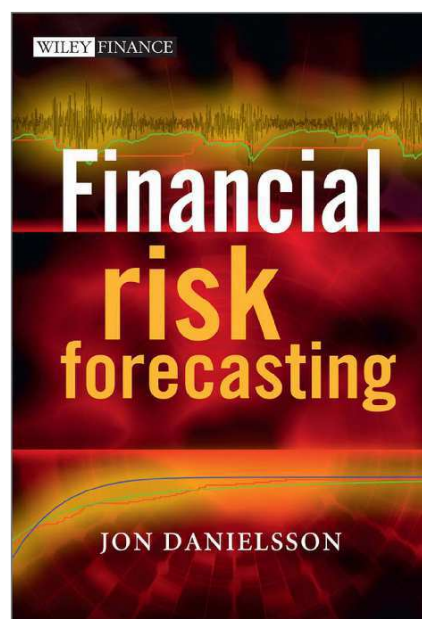
Dowd K., 2005. Measuring Market Risk, Wiley

Alexander C., 2009. Market Risk Analysis, Wiley

Jorion P., 2007. Value at risk. McGraw-Hill

Materiały z Internetu:

RiskMetrics – technical document: [link](#)



Plan spotkań

Blok 1

- i. Wprowadzenie, podstawy R
- ii. Szeregi czasowe w R (zoo, Quandl, apply, ggplot2)
- iii. Własności szeregów czasowych, rozkłady parametryczne i empiryczne, qq-plot,...
- iv. VaR i ES: rozkłady parametrycznych, symulacja historyczna, Cornisch-Fisher
- v. VaR i ES: grupowanie wariancji, model EWMA
- vi. VaR i ES: grupowanie wariancji, model GARCH
- vii. PREZENTACJE

Blok 2

- i. VaR i ES dla dalszych horyzontów
- ii. Backtesting
- iii. Testy warunków skrajnych
- iv. PREZENTACJE

Zasady zaliczenia

W trakcie zajęć można zbierać:

- 20 punktów za 2 prezentacje po 10 punktów
- 10 punktów za egzamin tradycyjny
- 2 punkty za aktywną obecność (każda nieobecność to minus 0.5 pkt)

10 punktów za prezentację składa się z:

- 8 punktów za przeprowadzone obliczenia
- 2 punkty za styl (max strona tytułowa + 7 slajdów).

Wydrukowana prezentacja powinna być dostarczona do prowadzącego zajęcia.

punkty	do 15	do 18	do 21	do 24	do 27	od 27
ocena	ndst	dst	dst+	db	db+	bdb

Co to jest R

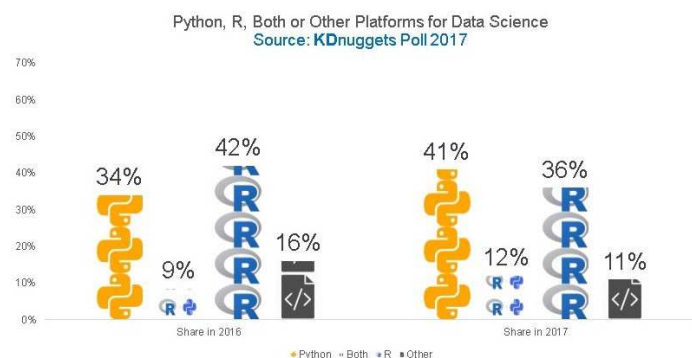
- środowisko do obliczeń statystycznych i wizualizacji wyników, stworzone przez Roberta Gentlemana i Rossa Ihakę na uniwersytecie w Auckland w 1996 r. Nazwa pochodzi od pierwszych liter imion twórców i jest nawiązaniem do języka S
- GNU R rozprowadzany jest w postaci kodu źródłowego oraz w postaci binarnej wraz z wieloma dystrybucjami dla Linuksa, Microsoft Windows i Mac OS
- R jest wykorzystywany w wielu znanych firmach, w tym m.in. Facebook, Google, Merck, Altera, Pfizer, LinkedIn, Shell, Novartis, Ford, Mozilla czy Twitter.
- Producenci komercyjnych pakietów statystycznych (SPSS, SAS, RapidMiner, Statistica) oferują dedykowane mechanizmy zapewniające ich współpracę z R
- R dostarcza szeroką gamę technik statystycznych (liniowe i nieliniowe modelowanie, klasyczne testy statystyczne, analiza szeregów czasowych, klasyfikacja, grupowanie,...) i graficznych.
- W dodatku R jest rozszerzalne za pomocą dodatkowych pakietów oraz skryptów pisanych przez użytkownika.

* Na podstawie informacji z Wikipedii – [link](#)

Dlaczego R

1. Popularność

R is also the name of a popular programming language used by a growing number of data analysts inside corporations and academia



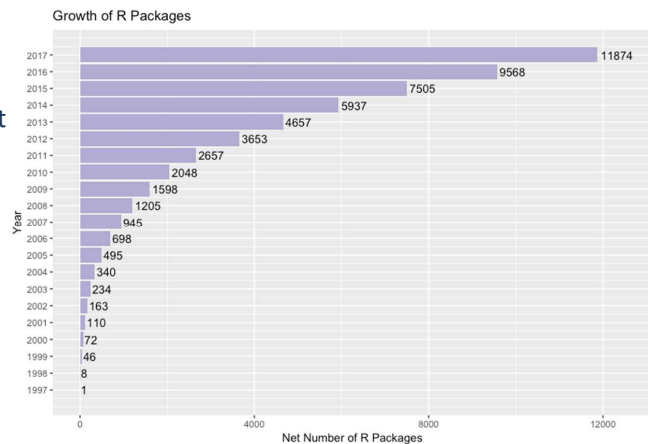
Dlaczego R

2. Wszeczstronność

„The great beauty of R is that you can modify it to do all sorts of things,” said Hal Varian, chief economist at Google. “And you have a lot of prepackaged stuff that’s already available, so you’re standing on the shoulders of giants.”

3. Cena

„R first appeared in 1996, when the statistics professors Ross Ihaka and Robert Gentleman of the University of Auckland in New Zealand released the code as a **free software package**.”



R – przydatne linki

Strona projektu R

<https://www.r-project.org/>

Materiały do nauki pakietu R:

P. Kuhnert & B. Venables, [An Introduction to R: Software for Statistical Modeling & Computing](#)

P. Biecek, [Przewodnik po pakiecie R](#)

Rproject, [An Introduction to R](#)

Temat 1: Zadania

Zadanie 1.1.

1. Ściągnąć i rozpakować do folderu KodyR/fundusze wyceny funduszy inwestycyjnych z bossa.pl
 - <http://bossa.pl/pub/fundinvest/mstock/mstfun.zip>
 - <http://bossa.pl/pub/ofe/mstock/mstfun.lst>
2. Wybrać 2-3 fundusze o różnej charakterystyce (z komponentem akcyjnym i/lub surowcowym), z wycenami dziennymi i historią co najmniej 5 lat.
3. Dla wybranych funduszy, pobrać z serwisu bossafund.pl i przestudiować: karty funduszy i kluczowe informacje dla inwestorów (Key Investor Information Document - KIID).

Temat 2

Finansowe szeregi czasowe

- Pozyskiwanie danych finansowych
- Pakiet zoo w R
- Prosta i logarytmiczna stopa zwrotu
- Momenty rozkładu stóp zwrotu
- Charakterystyki szeregów finansowych
- Wykres QQ plot (kwantyl-kwantyl)
- Rozkład t-Studenta

Pozyskiwanie danych finansowych

Quandl to interfejs do darmowych i komercyjnych repozytoriów

```
> require(Quandl)
> cpiUS <- Quandl("FRED/CPIAUCNS", type = "zoo") ## CPI USA
> brent <- Quandl("EIA/PET_RBRTM", type = "zoo") ##ceny ropy brent
```

Quantmod: Yahoo, Google, Oanda,

```
> require(quantmod)
> getSymbols("SPY", src = "yahoo")
```

Import/eksport plików różnych formatów: csv, xls, xlsx, xml,...

Współpraca z popularnymi bazami danych: MySQL, PostgreSQL, MS SQL Server,...

Szeregi czasowe w R, zoo

- Szereg czasowy (Time Series - TS) to ciąg wartości $X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \dots$; gdzie $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ są uporządkowanymi indeksami czasowymi.
- Biblioteki R do pracy z TS: tseries, timeSeries, tis, stats, **zoo**, xts, ...
- Obiekty zoo składają się z numerycznych wartości (wektor lub macierz) i indeksów czasowych tej samej długości

```
> ts.zoo <- zoo(values , order.by = timeIdx)
## values - klasy numeric lub matrix
## timeIdx - klasy Date, również yearmon, yearqtr, POSICct, timeDate
> index(ts.zoo) ## zwraca wektor indeksów czasowych
> coredata(ts.zoo) ## zwraca wektor/macierz wartości
> index(ts.zoo) <- newTimeIdx
> coredata(ts.zoo) <- newValues
```
- Stosunkowo łatwa praca z oknami czasowymi, konwersja częstotliwości (dzienna → tygodniowa → miesięczna),...

Daty

Obiekt Date reprezentuje datę dzienną jako liczbę dni od 01-01-1970

```
> mydate <- as.Date("01-01-1970", format = "%d-%m-%Y")
> weekdays(mydate)    ##months(mydate)    quarters(mydate)
> mydate + 1
> mydate <- mydate - 5
```

Obiekty difftime

```
> mydate1 <- as.Date("01-11-1990", format = "%d-%m-%Y")
> mydate - mydate1
```

Sekwencje dat

```
> seq(from=mydate, to=mydate1, by="5 months")
> seq(from=mydate, by="2 months", length.out=20)
```

Biblioteka lubridate pozwala na (w miarę) wygodne operowanie datami

```
> dmy("01-01-1970") + years(2)
> dmy("01-01-1970") + (0:19)*months(2)
> wday(mydate)
```

Obiekty zoo

Łączenie szeregów

```
> merge(ts.zoo.1, ts.zoo.2) ## suma po indeksach, brakujące obs. jako NA
> merge(ts.zoo.1, ts.zoo.2, all=FALSE) ## przecięcie po indeksach
```

Okna

```
> window(ts.zoo, start=as.Date("2007-01-05"), end=as.Date("2008-02-01"))
```

Przesunięcia

```
> lag(ts.zoo, -1) ## poprzednia wartość
> lag(ts.zoo, 1) ## następna wartość
```

Różnice

```
>diff(ts.zoo)
```

Stopy zwrotu

```
> diff(ts.zoo)/lag(ts.zoo, -1) ## proste
> diff(log(ts.zoo))           ## logarytmiczne
```

Zamiast pętli – apply w kilku odstępach

Rolowane odchylenie standardowe

```
> rollsd <- rollapply(datazoo, width =10, sd, by=1)
```

Tak samo ale na rozłącznych oknach (kalendarzowych)

```
> require(xts)
> rollsd <- apply.weekly(datazoo, sd) ##daily, monthly, quarterly, yearly
```

Konwersja danych dziennych do tygodniowych

```
> weeklydata <- apply.weekly(dailydata, last) ## first, mean
```

Funkcje typu apply są (zwykle) szybsze od pętli, niekiedy można je też zrównoleglić

Biblioteki plyr, dplyr,...

Stopy zwrotu

Prosta stopa zwrotu:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}} = \exp(r_t) - 1$$

Logarymiczna stopa zwrotu (=stopa o ciągłej kapitalizacji):

$$r_t = \ln(P_t + D_t) - \ln(P_{t-1}) = \ln(1 + R_t)$$

Stopy zwrotu

Stopy proste:

- Łatwiejsze przy liczeniu stóp zwrotu z portfela
- Inwestorzy zainteresowani stopami prostymi

Stopy logarytmiczne

- Symetria
- Sumowalność
- Wygodne dla modelowania ekonometrycznego

Stopy zwrotu

Prosta stopa zwrotu: $R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}} = \exp(r_t) - 1$

Logarymiczna stopa zwrotu: $r_t = \ln(P_t + D_t) - \ln(P_{t-1}) = \ln(1 + R_t)$

Stopa zwrotu z portfela K aktywów:

$$R_{t,portfolio} = \sum_{k=1}^K w_k R_{t,k} = w' R_t$$
$$r_{t,portfolio} \neq \sum_{k=1}^K w_k r_{t,k}$$

Statystyki opisowe

Średnia: $\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_t$

Wariancja: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu})^2$

Odchylenie standardowe: $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$

Skośność: $\hat{S} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu})^3}{\hat{\sigma}^3}$

Kurtoza: $\hat{K} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu})^4}{\hat{\sigma}^4}$

Momenty dla N(0,1)

Wartość oczekiwana: $\mu = E(r_t) = 0$

Wariancja: $\sigma^2 = E((r_t - \mu)^2) = 1$

Odchylenie standardowe: $\sigma = 1$

Skośność: $S = E((r_t - \mu)^3) = 0$

Kurtoza: $K = E((r_t - \mu)^4) = 3$

Charakterystyki szeregów finansowych

1. Grube ogony (fat tails)
 - kurtoza większa od 3
2. Asymetria spadków i wzrostów (bardziej gwałtowne spadki)
 - ujemna skośność

Dane dla stóp zwrotu WIG

(dane dzienne z okresu 1.12.2006 – 28.04.2017)

$\hat{\mu} = 0.000076 \rightarrow$ annualizowana stopa zwrotu 0.019

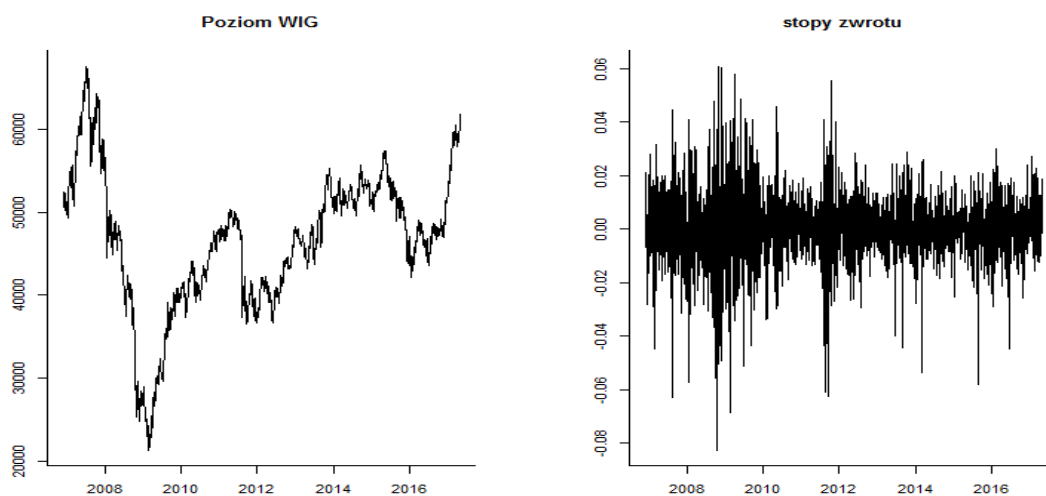
$\hat{\sigma} = 0.0128 \rightarrow$ annualizowane odchylenie standardowe to 0.20

$\hat{S} = -0.45$

$\hat{K} = 7.05$

Uwaga: Odchylenie standardowe a wskaźnik ryzyka SRRI w KIID ([link](#))

Charakterystyki szeregów finansowych



Grube ogony - testowanie

Testy

- D'Agostino: $H_0: S = 0$
- Anscombe-Glynn: $H_0: K = 3$
- Jarque-Bera: $H_0: S = 0 \wedge K = 3$

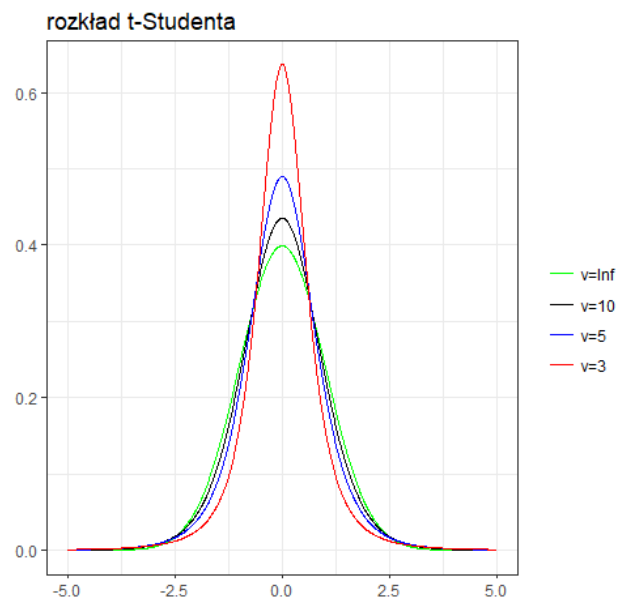
Grube ogony: rozkład t-Studenta

Rozkład t-Studenta:

- dla $\nu = \infty$ rozkład normalny
- dla $\nu < 2$ brak wariancji
[uwaga!!! wariancja $\neq 1$!!!]
- momenty stopnia do $\nu - 1$
- Dla cen akcji, zazwyczaj $\nu \sim 5$

Wariancja:
$$Var(t_\nu) = \frac{\nu}{\nu-2}$$

Kurtoza:
$$K(t_\nu) = 3 + \frac{6}{\nu-4}$$

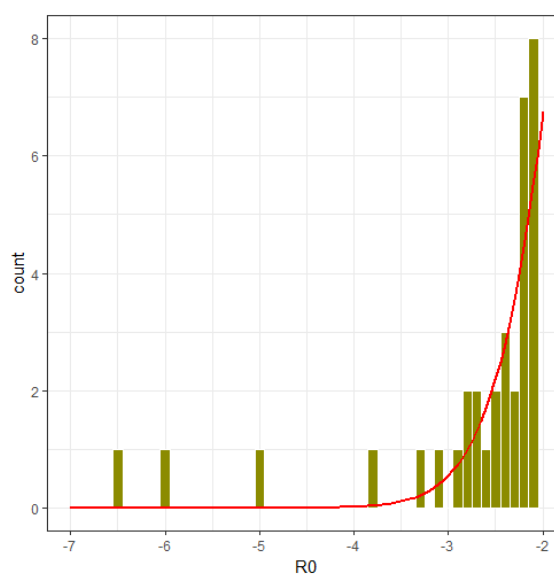
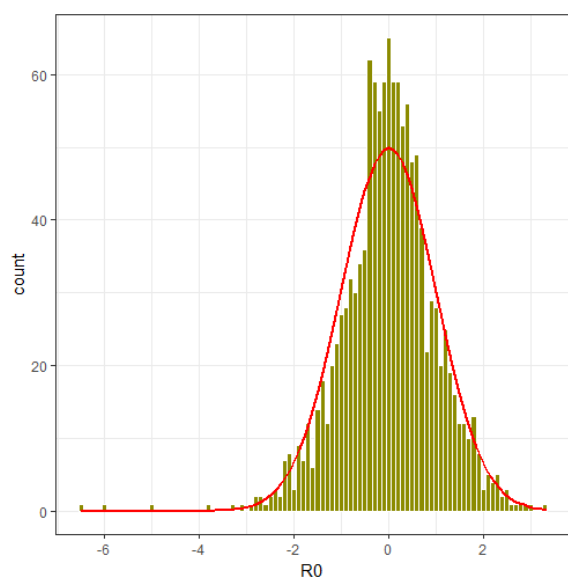


Grube ogony - testowanie

Wykresy

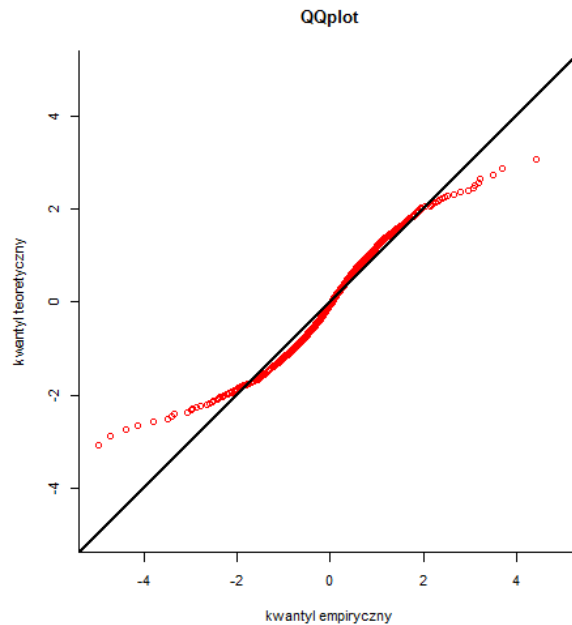
- QQ (quantile-quantile plot)
Empiryczne kwantyle względem kwantyli dla teoretycznego rozkładu
- Density plot
Empiryczna funkcja gęstości na tle f. gęstości teoretycznego rozkładu

Empiryczna funkcja gęstości a f. gęstości rozkładu normalnego



QQ – plot (wykres kwantyl-kwantyl) kwantyl teoretyczny: rozkład normalny

	kwantyl empiryczny	kwantyl teoretyczny
1%	-3.009	-2.326
2%	-2.387	-2.054
3%	-2.018	-1.881
4%	-1.750	-1.751
5%	-1.540	-1.645
6%	-1.426	-1.555
7%	-1.331	-1.476
8%	-1.259	-1.405
9%	-1.164	-1.341
10%	-1.093	-1.282
11%	-1.028	-1.227
12%	-0.982	-1.175
13%	-0.924	-1.126
14%	-0.875	-1.080
15%	-0.832	-1.036



Grube ogony: rozkład t-Studenta

Wariancja t_v :

$$\text{Var}(t_v) = \frac{v}{v-2}$$

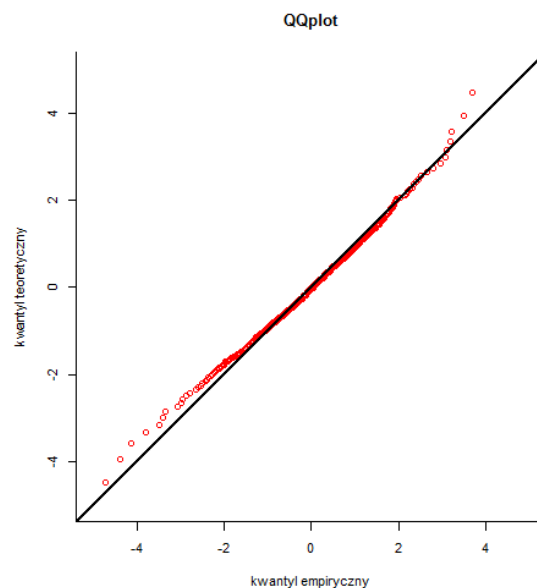
Kwantyl p dla zmiennej o wartości oczekiwanej μ i odchyleniu standardowym σ

$$Q_p = \mu + \sigma \left(T_v^{-1}(p) \sqrt{\frac{v-2}{v}} \right)$$

Uwaga!!!

W R występują różnice między funkcjami:

rt/qt/dt/ct – pakiet stats
rdist/qdist/ddist/cdist – pakiet rugarch

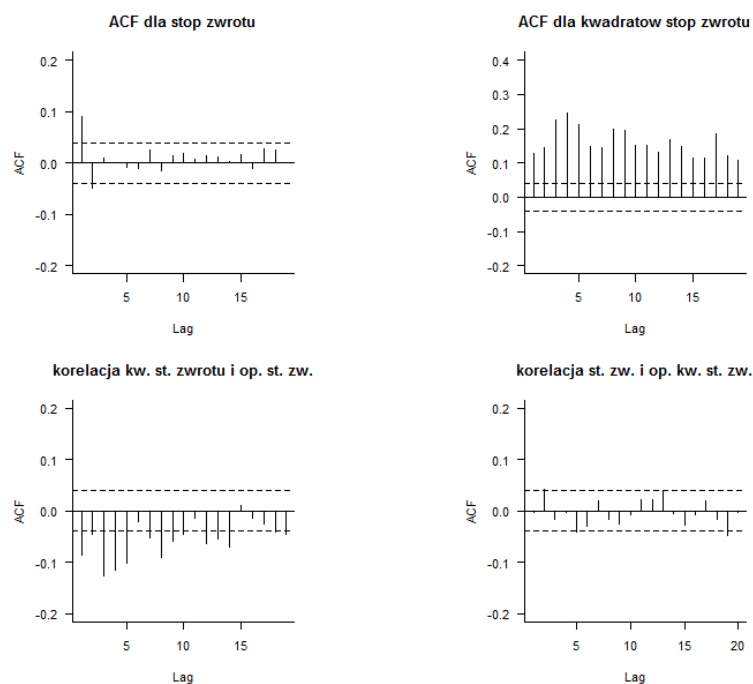


* Szerzej w artykule *Student t Distributed Linear Value-at-Risk* – [link](#)

Charakterystyki szeregów finansowych

1. Grube ogony (fat tails)
2. Asymetria spadków i wzrostów (bardziej gwałtowne spadki)
3. Brak autokorelacji stóp zwrotu
 - $cor(r_t, r_{t-p}) = 0$
4. Nieliniowe zależności autokorelacyjne
 - brak korelacji \neq niezależność
 - $cor(r_t^2, r_{t-p}^2) \neq 0$: grupowanie zmienności
 - $cor(r_t^2, r_{t-p}) \neq 0$: efekt dźwigni
 - ale $cor(r_t, r_{t-p}^2) = 0$

Charakterystyki szeregów finansowych: WIG



Test Ljunga-Boxa (adjusted portmanteau)

Test na występowanie autokorelacji do rzędu H

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_H = 0$$

Statystyka testu:

$$Q_{LB} = T(T + 2) \sum_{h=1}^H \frac{\hat{\rho}_h^2}{T - h}$$

Przy prawdziwości H_0 statystyka Q_{LB} ma rozkład $\chi^2(H)$

Wyniki dla WIG:

data: y0; LB = 45.034, df = 20, p-value = 0.001092

data: y0^2; LB = 1385.4, df = 20, p-value < 2.2e-16

Temat 2: Zadania

Zadanie 2.1. Stwórz na kartce/tablicy wykres QQplot dla następujących danych:

0.49	-0.56	0.61	0.67	0.82	0.85	-2.04	-0.65	0.80	-1.00
------	-------	------	------	------	------	-------	-------	------	-------

wiedząc, że kwantyle rozkładu normalnego są następujące

q	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
qnorm(q)	-1.64	-1.04	-0.67	-0.39	-0.13	0.13	0.39	0.67	1.04	1.64

Zadanie 2.2. Dla szeregów czasowych opisujących wycenę wybranego funduszu inwestycyjnego, wykonaj następujące czynności:

- Oblicz statystyki opisowe: średnia, odch. standardowe, skośność, kurtoza
- Zweryfikuj hipotezy, że skośność jest zerowa, zaś kurtoza jest równa 3
- Dokonaj standaryzacji zmiennej
- Stwórz wykres empirycznej funkcji gęstości na tle f. gęstości rozkładu normalnego
- Stwórz wykres QQ plot względem rozkładu normalnego
- Oszacuj parametry rozkładu t-Studenta (odch. Standardowe i st. swobody, przyjmij m=0)
- Stwórz wykres QQ plot względem rozkładu normalnego
- Stwórz wykresy ACF w celu sprawdzenia, czy:

$$\text{cor}(r_t, r_{t-p}) = 0; \text{cor}(r_t^2, r_{t-p}^2) \neq 0; \text{cor}(r_t^2, r_{t-p}) \neq 0 \text{ oraz } \text{cor}(r_t, r_{t-p}^2) = 0$$

- Przeprowadź test LB na brak autokorelacji dla stóp zwrotu oraz ich kwadratów

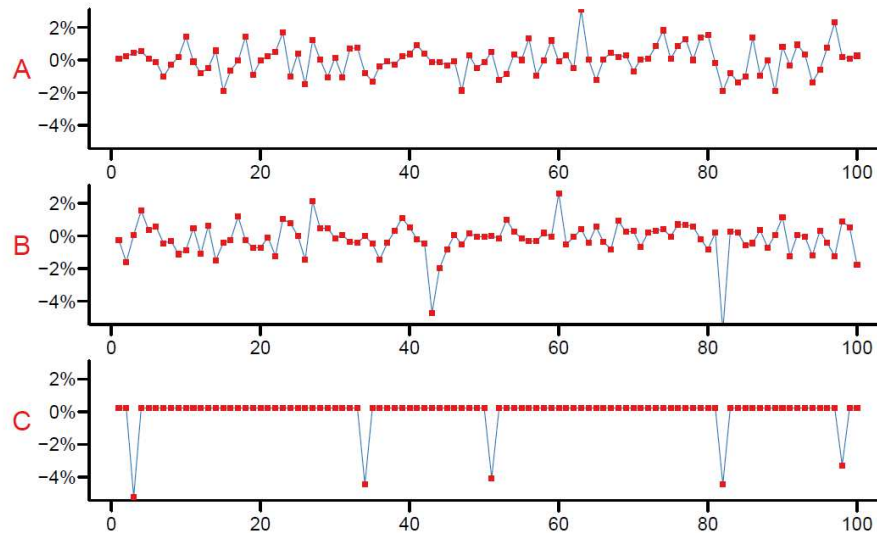
Temat 3

Proste modele ryzyka

- Definicja wartości zagrożonej (VaR) i oczekiwanej straty (ES)
- Etapy liczenia VaR i ES
- Metody szacowania VaR i ES
- Symulacja historyczna
- Parametryczne modele VaR i ES
- Symulacje Monte-Carlo
- Rozszerzenie Cornisha-Fishera

Ryzyko \neq odchylenie standardowe

Wartość oczekiwana i odchylenie to nie wszystko ...
 Trzy szeregi z $E(Y) = 0$ i $Sd(Y) = 1$ (za Danielson, 2011)



Ryzyko: Value at Risk i Expected Shortfall

Miary powszechnie wykorzystywane w analizie ryzyka:

Wartość zagrożona (Value at Risk, VaR)

Definicja 1: $P(r \leq VaR_p) = p$

Definicja 2: $p = \int_{-\infty}^{VaR_p} f(r)dr$

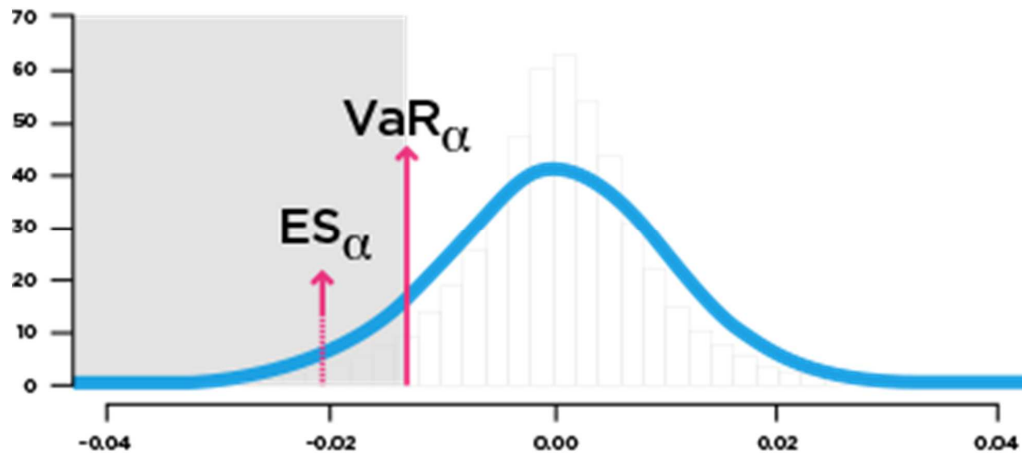
Oczekiwana strata (Expected shortfall, ES)

Definicja 1: $ES_p = E(r|r \leq VaR_p)$

Definicja 2: $ES_p = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{VaR_p} rf(r)dr$

Definicja 3: $ES_p = \frac{1}{p} \int_0^p VaR_s ds$

Ryzyko: Value at Risk i Expected Shortfall



Ryzyko: Value at Risk i Expected Shortfall

Etapy liczenia VaR/ES

- Ustalenie poziomu tolerancji (prawdopodobieństwa): p
- Ustalenie horyzontu: H
- Ustalenie okna estymacji/kalibracji oraz częstotliwości danych
- Wybór modelu
- Metoda weryfikacji modelu

Basel ii: miarą ryzyka jest VaR ([link](#), s. 44)

...ale plany zamiany miary ryzyka na ES ([link](#), s. 52)

Ryzyko: Value at Risk i Expected Shortfall

Quantitative standards Basel II

- a. 99th percentile *VaR* must be computed on a daily basis
- b. In calculating *VaR* the minimum "*holding period*" will be 10 trading days. Banks may use *VaR* numbers calculated according to shorter holding periods scaled up to ten days by the square root of time
- c. The choice of sample period for calculating *VaR* is constrained to a minimum length of one year.
- d. banks will be free to use models based, for example, on variance-covariance matrices, historical simulations, or Monte Carlo simulations
- e. The multiplication factor will be set by individual supervisory authorities on the basis of their assessment of the quality of the bank's risk management system, subject to an absolute minimum of 3. Banks will be required to add to this factor a "plus" directly related to the ex-post performance of the model, thereby introducing a builtin positive incentive to maintain the predictive quality of the model. The plus will range from 0 to 1 based on the outcome of so-called "backtesting."

Źródło: Basle Committee on Banking Supervision, 1996.

AMENDMENT TO THE CAPITAL ACCORD TO INCORPORATE MARKET RISKS ([link](#), s. 44)

Metody szacowania VaR/ES

A. Modele nieparametryczne

B. Modele parametryczne

C. Symulacje Monte-Carlo

Połączenia A, B i C

A. Modele nieparametryczne: symulacja historyczna

Symulacja historyczna

K1. zakładamy, że empiryczny rozkład stóp zwrotu jest stały w czasie:
dane z przeszłości dobrze przybliżają przyszły rozkład stóp zwrotu

K2. Porządkujemy stopy zwrotu od najmniejszej do największej:

$$rs_1 < rs_2 < \dots < rs_N$$

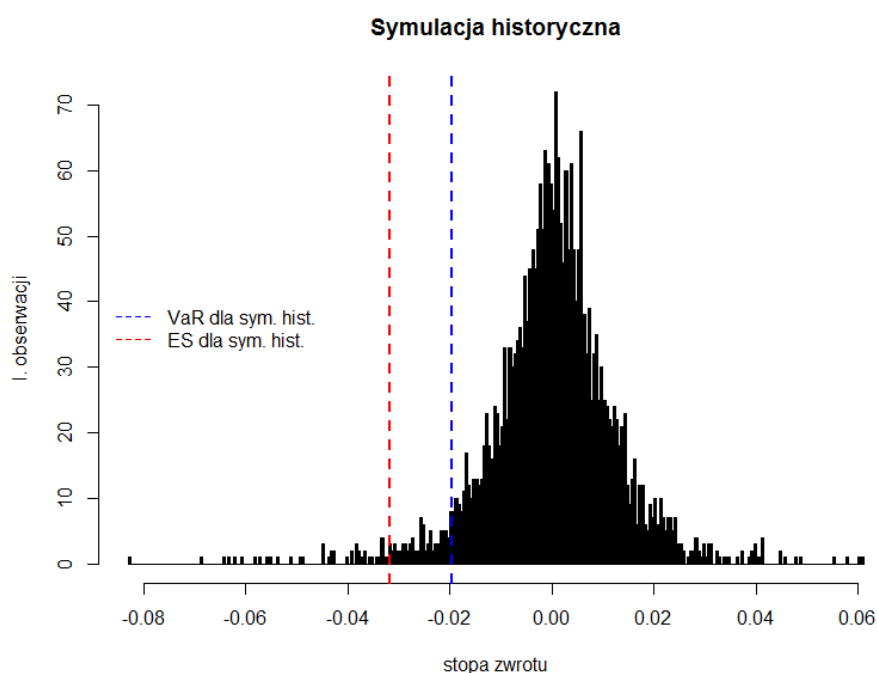
K3. Wartość VaR_p ustalana na podstawie empirycznego rozkład z N ostatnich obserwacji, tj. bierzemy $M = \text{floor}(pN)$ -tą stopę (rs_m), czyli p -ty kwantyl

$$VaR_p = rs_M$$

K4. ES_p liczona jako średnia stopa zwrotu dla stóp mniejszych niż $VaR(p)$

$$ES_p = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M rs_i$$

A. Modele nieparametryczne: symulacja historyczna dla WIG



A. Modele nieparametryczne symulacja historyczna

Wadą historycznej symulacji jest niska precyzja VaR!

Powód: wykorzystujemy tylko informację na temat p -tego kwantyla

Odchylenie standardowe dla p -tego kwantyla wynosi : $S(VaR_p) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{Tf^2}}$

Dla WIG:

$$p = 0.05; \quad N = 2587; \quad f = 4.98; \quad S(VaR_p) = 0.00086$$

95% przedział ufności:

$$P\{VaR_p \in (\widehat{VaR}_p - 1.96S(VaR_p); \widehat{VaR}_p + 1.96S(VaR_p))\} = 0.95$$

Dla WIG:

$$P(VaR_p \in (-0.0213; -0.0179)) = 0.95$$

A. Modele nieparametryczne symulacja historyczna

Zalety:

- Intuicyjność i łatwość implementacji
- Niewielkie wymagania dotyczące danych
- Łatwość w komunikacji wyników
- Brak konieczności zakładania typu rozkładu
- Łatwe możliwości rozszerzeń (np. o grupowanie wariacji)

Wady:

- Całkowita zależność od danych historycznych
- Brak możliwości uwzględnienia zmian strukturalnych w próbie
- Niska precyzja oszacowań VaR

B. Modele parametryczne

- Poszukujemy postaci rozkładu gęstości stóp zwrotu w przyszłości $f(r)$
- Znając ten rozkład, możemy obliczyć VaR i ES

$$p = \int_{-\infty}^{VaR_p} f(r) dr$$

$$ES_p = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{VaR_p} r f(r) dr$$

B. Modele parametryczne rozkład normalny

Wartości dla rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$

$$VaR_p = \mu + \sigma \Phi^{-1}(p)$$

$$ES_p = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(p))}{p}$$

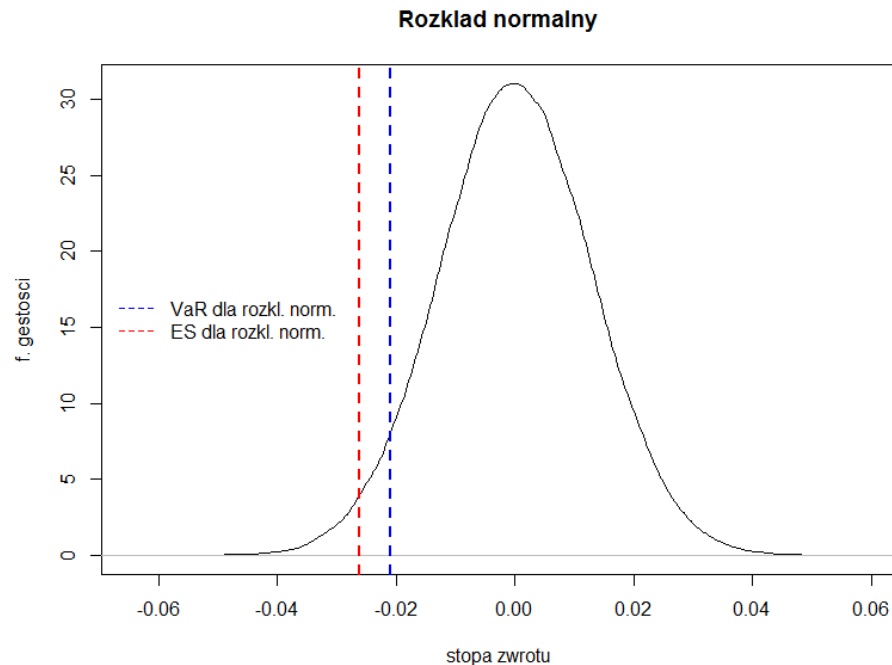
gdzie Φ i ϕ to dystrybuanta oraz f. gęstości rozkładu $N(0,1)$

Odpowiednie wartości dla rozkładu $N(0,1)$ wynoszą (z minusem)

p	0.5	0.1	0.05	0.025	0.01	0.001
VaR	0	1.282	1.645	1.960	2.326	3.090
ES	0.798	1.755	2.063	2.338	2.665	3.367

Uwaga: tutaj zakładamy, że $r_{T+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$, zaś obliczenia są dla VaR_{T+1} oraz ES_{T+1}

B. Modele parametryczne: rozkład normalny



C. Symulacje Monte Carlo

- Załóżmy, że znamy model opisujący DGP ale nie potrafimy wyprowadzić analitycznej postaci wzoru dla VaR/ES
- W takiej sytuacji stosujemy metody Monte Carlo.
- Etapy MC:
 1. Generujemy „ N ” sztucznych, przyszłych stóp zwrotu $r^{(n)}$ dla $n = 1, 2, \dots, N$
 2. Porządkujemy te stopy od najmniejszej do największej $rs^{(1)} \leq rs^{(2)} \leq \dots$
 3. Dla $M = \text{floor}(pN)$ liczymy :

$$VaR_p = rs^{(M)} \text{ oraz } ES_p = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M rs^{(i)}$$

C. Symulacje Monte Carlo

Porównanie wartości dla WIG:

- metoda parametryczna vs. MC dla rozkładu normalnego ($N = 100\ 000$)

VaR

Metoda analityczna: -0.02091533

Metoda MC: -0.02095668

ES:

Metoda analityczna: -0.02624805

Metoda MC: -0.02626429

Grube ogony

Dwie proste metody uwzględnienia „grubych ogonów”:

1. rozkład t -Studenta
2. rozszerzenie Cornisha-Fishera
korekta rozkładu normalnego o skośność i kurtozę

Metoda bardziej rozbudowana (poza wykładem):

- Teoria wartości ekstremalnych (EVT, extreme value theory)

Grube ogony: rozkład t-studenta

Przypomnienie:

Wariancja t_v :
$$Var(t_v) = \frac{v}{v-2}$$

Kwantyl p :
$$Q_p = \mu + \sigma \left(T_v^{-1}(p) \sqrt{\frac{v-2}{v}} \right)$$

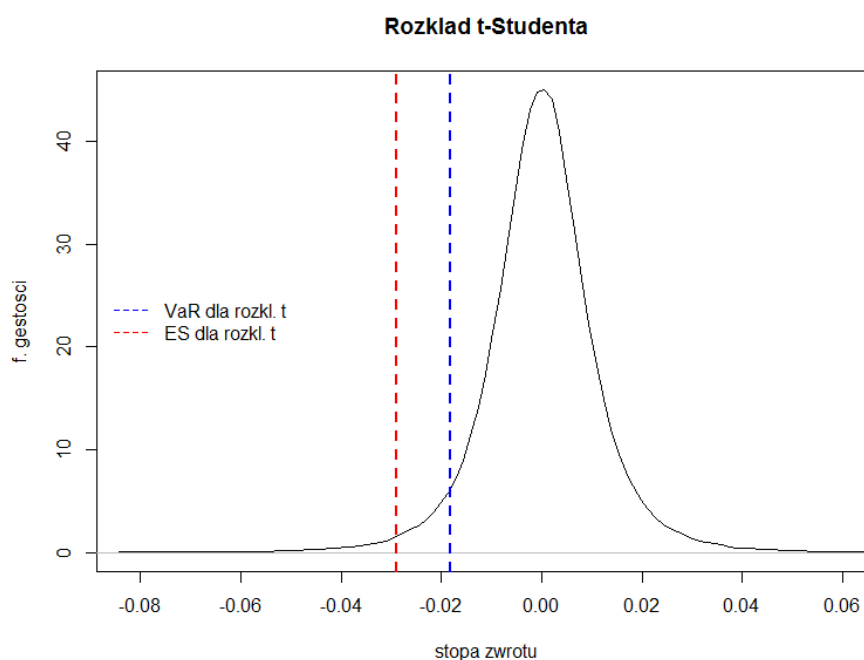
Wartość zagrożona:

$$VaR_p = \mu + \sigma \left(T_v^{-1}(p) \sqrt{\frac{v-2}{v}} \right)$$

Metoda liczenia oczekiwanej straty, całka numeryczna:

$$ES_p = \mu + \sigma \frac{1}{p} \int_0^p \left(T_v^{-1}(s) \sqrt{\frac{v-2}{v}} \right) ds = \frac{1}{p} \int_0^p VaR_s ds$$

Grube ogony: rozkład t-studenta



Grube ogony: rozszerzenie Cornisha-Fishera

- Rozszerzenie Cornisha-Fishera pozwala na uwzględnienie wpływu skośności i kurtozy (także wyższych momentów*) na kwantyle rozkładu (czyli VaR):

$$VaR_p = \mu + \sigma \left(\gamma_p + \frac{\gamma_p^2 - 1}{6} S + \frac{\gamma_p^3 - 3\gamma_p}{24} (K - 3) - \frac{2\gamma_p^3 - 5\gamma_p}{36} S^2 \right)$$

gdzie $\gamma_p = \Phi^{-1}(p)$.

- Dla rozkładu normalnego ($S = 0$ i $K = 3$), wzór skraca się do:

$$VaR_p = \mu + \sigma \gamma_p$$

*Szerzej na temat rozszerzenia Cornisha-Fishera – [link](#)

** Metodologia liczenia MRM - [link](#)

Grube ogony: rozszerzenie Cornisha-Fishera wyniki dla WIG

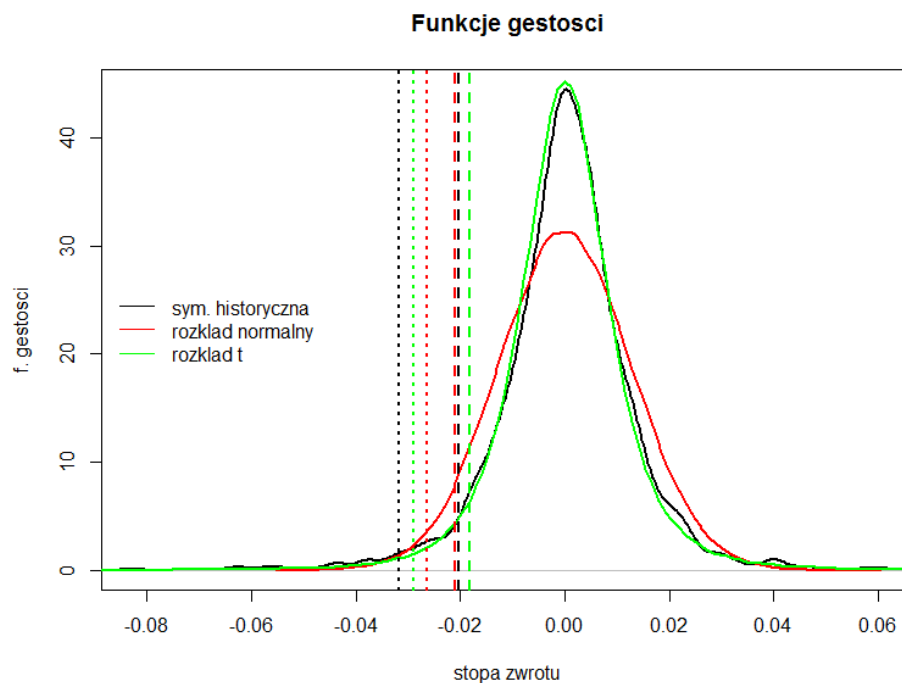
$$S = -0.450$$

$$K = 7.055$$

$$\gamma_p = -1.645$$

$$\left(\gamma_p + \frac{\gamma_p^2 - 1}{6} S + \frac{\gamma_p^3 - 3\gamma_p}{24} (K - 3) - \frac{2\gamma_p^3 - 5\gamma_p}{36} S^2 \right) = -1.687$$

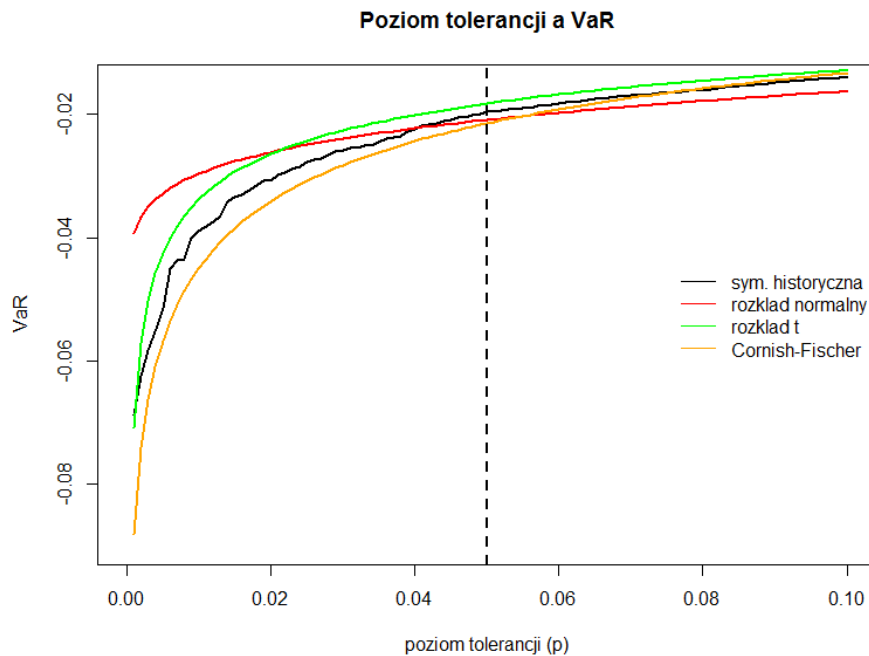
Porównanie modeli



Porównanie modeli

	VaR	ES
sym. hist.	-0.01963	-0.03170
rozkl. norm.	-0.02092	-0.02625
rozklad t	-0.01824	-0.02890
Cornish-Fisher	-0.02145	brak

Porównanie modeli



Wady VaR

- Oparte o dane historyczne
→ nie uwzględnia możliwych zmian strukturalnych
- Nie określa strat w przypadku przekroczenia VaR
→ dlatego warto podawać VaR i ES
- Trudności w obliczaniu dla dużych portfeli
- Wyniki wrażliwe względem wyboru modelu
- Nie jest to miara koherentna
→ nie spełnia warunku subaddytywności $VaR(X + Y) \leq VaR(X) + VaR(Y)$

Przykład:

X i Y dwie obligacje z niezależnym prawdopodobieństwem ogłoszenia bankructwa 4%. Dla każdej obligacji oddzielnie przy $p = 5\%$ VaR wynosi 0, zaś dla $X + Y$ VaR jest 50%

Temat 3: Zadania

Zadanie 3.1. Dla pewnego aktywa okazało się, że logarytmiczne stopy zwrotu mają rozkład t-Studenta o 5 stopniach swobody. Oblicz VaR dla wybranego poziomu tolerancji p , wiedząc, że oczekiwana stopa zwrotu wynosi 0.5%, zaś odchylenie standardowe to 6%. Wartości krytyczne (lewostronne) rozkładu t-Studenta o 5 stopniach swobody są zawarte w poniższej tabeli

1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
-3.365	-2.757	-2.422	-2.191	-2.015	-1.873	-1.753	-1.649	-1.558	-1.476

Uwaga: wartości krytyczne wygenerowane za pomocą funkcji $qt(p, 5)$

Zadanie 3.2. Wiadomo, że stopy zwrotu mają rozkład jednostajny na w przedziale $(-0.01; 0.01)$, tzn. $r \sim U(-0.01, 0.01)$. Oblicz wartość VaR i ES dla $p=0.05$ oraz $p=0.10$.

Zadanie 3.3. Oblicz VaR za pomocą wzoru Cornisha-Fishera dla aktywa, którego stopy zwrotu mają następujące charakterystyki: $\mu = 0.5\%$, $\sigma = 5\%$, $S = -1$, $K = 7$. Przyjmij poziom tolerancji $p = 0.05$ oraz 0.025 . [$\Phi^{-1}(0.05) = -1.645$ oraz $\Phi^{-1}(0.025) = -1.960$]

Zadanie 3.4*. Stwórz funkcję w pakiecie R, za pomocą której będziesz mógł obliczyć oczekiwaną stratę spójną z przybliżeniem Cornischa-Fishera. Wykorzystaj tę funkcję do obliczenia oczekiwanej straty dla poziomu tolerancji $p = 0.05$ oraz 0.025 dla aktywa z Zadania 3.3.

Temat 3: Zadania

Zadanie 3.5.

Dla szeregów czasowych opisujących wycenę wybranego funduszu inwestycyjnego (z zadania 2, Temat 2), wykonaj następujące czynności:

- Zastanów się, która z czterech metod omawianych na zajęciach (HS, norm, t, CF) jest według Ciebie odpowiednia do liczenia VaR (w świetle wyników z zadania 2, Temat 2)
- Oblicz wartości VaR i ES na podstawie 4 omawianych metod (HS, norm, t, CF) dla poziomu tolerancji 5%. dlaczego wyniki się różnią?
- Stwórz wykres „density plot” dla empirycznej funkcji gęstości, f. gęstości rozkładu normalnego i t-Studenta. Nanieś na wykres wartości z punktu b.
- Oblicz wartości VaR i ES na podstawie 4 omawianych metod (HS, norm, t, CF) dla poziomu tolerancji 1% i dodaj je do tabeli z punktu b.
- Przeprowadź dyskusję uzyskanych wyników

Temat 4

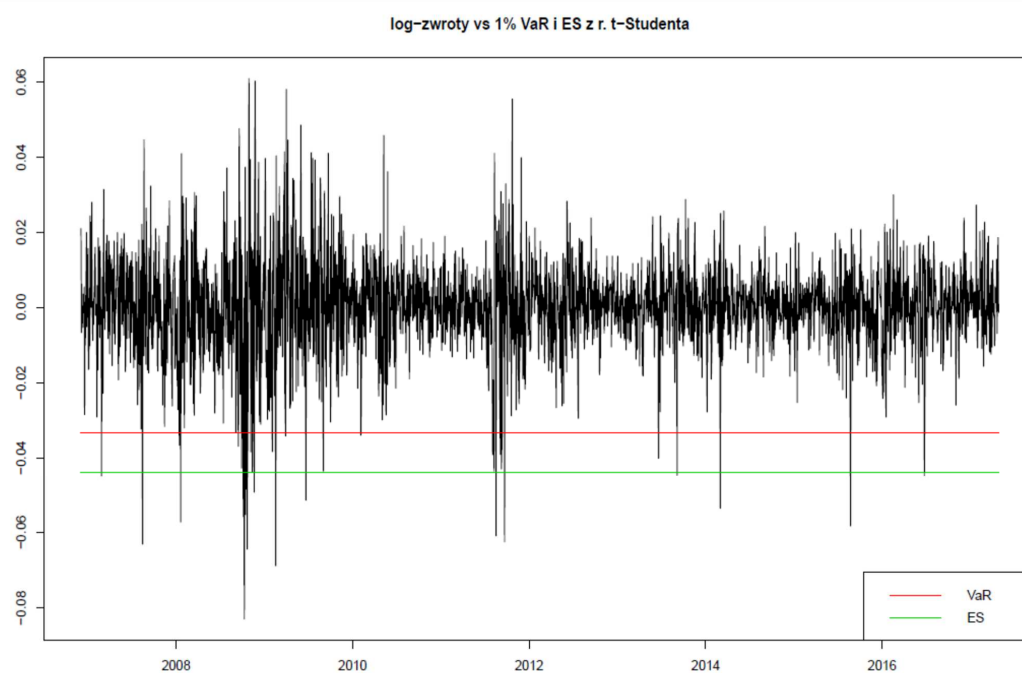
Grupowanie zmienności w modelu ryzyka

- Grupowanie zmienności
- Model średniej ruchomej (MA)
- Wykładnicza średnia ruchoma (EWMA)
- Model GARCH

Własności szeregów czasowych

1. Grube ogony (fat tails)
2. Asymetria zwrotów (gwałtowniejsze spadki niż wzrosty)
3. Brak korelacji stóp zwrotu
4. Nieliniowe zależności autokorelacyjne
 - grupowanie zmienności: $cor(r_t^2, r_{t-p}^2) \neq 0$
 - efekt dźwigni: $cor(r_t^2, r_{t-p}) < 0$

Założenie o stałej zmienności w czasie: rozkład t-Studenta



Metody szacowania zmienności

- Średnia ruchoma
Moving Average, MA
- Wykładnicza średnia ruchoma
Exponentially Weighted Moving Average, EWMA
- Model GARCH
Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
- Modele zmienności stochastycznej
Stochastic Volatility, SV
- Zmienność implikowana
Implied Volatility, IV

A. Średnia ruchoma, MA

Wzór na ruchomą prognozę wariancji (T – moment prognozy):

$$\sigma_{T+1}^2 = \frac{1}{W} \sum_{s=0}^{W-1} (r_{T-s} - \mu)^2$$

Uwaga 1: wartość zależy od wyboru okna W

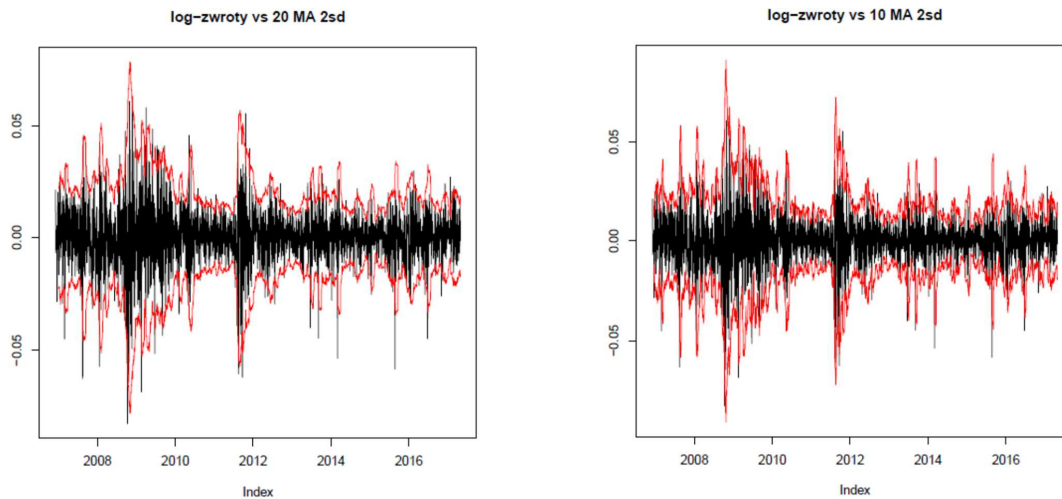
Uwaga 2: wykorzystujemy obserwacje do momentu T

Uwaga 3: inny zapis powyższego równania

średnia ważona, gdzie wagi dla wszystkich obserwacji są jednakowe:

$$\sigma_{T+1}^2 = \sum_{s=0}^{W-1} w_s (r_{T-s} - \mu)^2, \text{ gdzie } w_s = \frac{1}{W}$$

A. Średnia ruchoma, MA



B. Wykładnicza średnia ruchoma, EWMA

- Zmienność liczona jako średnia ważona przeszłych obserwacji:

$$\sigma_{T+1}^2 = \sum_{s=0}^{\infty} w_s (r_{T-s} - \mu)^2$$

gdzie wagi tworzą ciąg geometryczny:

$$w_s = \lambda^s \times \frac{1 - \lambda}{\lambda}$$

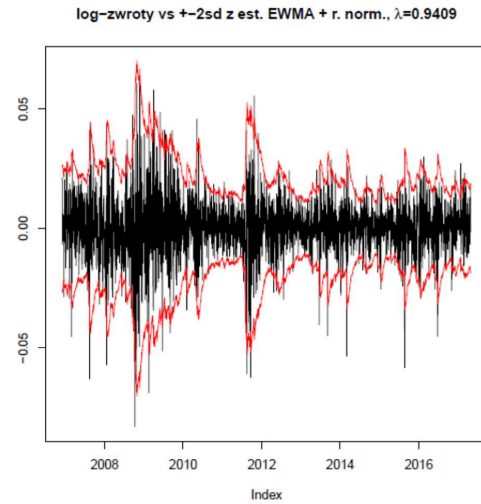
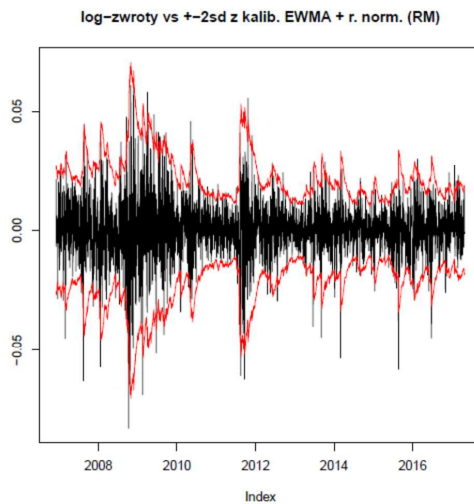
Uwaga: ponieważ wagi sumują się do jedności, to $w_0 = 1 - \lambda$

$$\sigma_{T+1}^2 = (1 - \lambda)(r_T - \mu)^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2$$

- W metodologii RiskMetrics (JP Morgan, [link](#)) parametrów λ i μ nie estymujemy. Dla danych dziennych przyjmujemy, że:

$$\lambda = 0.94 \text{ oraz } \mu = 0$$

Zmienność z EWMA



GARCH jako rozszerzenie EWMA

- RiskMetrics:

$$r_t \sim D(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda)r_{t-1}^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2$$

- GARCH(1,1):

$$r_t = \mu + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim D(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

- Restrykcje na parametry:

$$\mu = 0; \omega = 0; \alpha = 1 - \lambda; \beta = \lambda$$

- Do modelu GARCH powrócimy za chwilę.

VaR i ES z modelu EWMA

- Model EWMA

$$r_t \sim D(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda)r_{t-1}^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2$$

- Na podstawie modelu liczymy prognozę dla wariancji:

$$\sigma_{T+1}^2 = (1 - \lambda)r_T^2 + \lambda\sigma_T^2$$

- Znając dystrybuantę F_D rozkładu D możemy policzyć VaR jako:

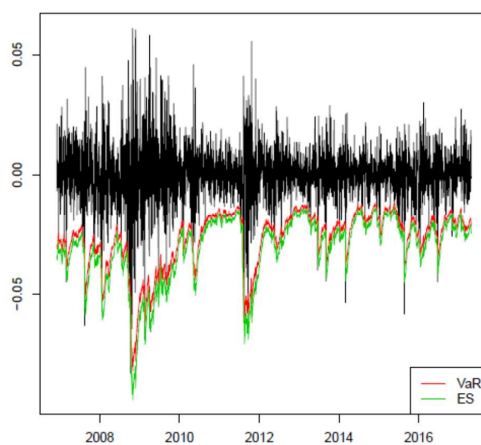
$$VaR_{p,T+1} = \sigma_{T+1}F_D^{-1}(p)$$

- Wartość ES wynosi natomiast

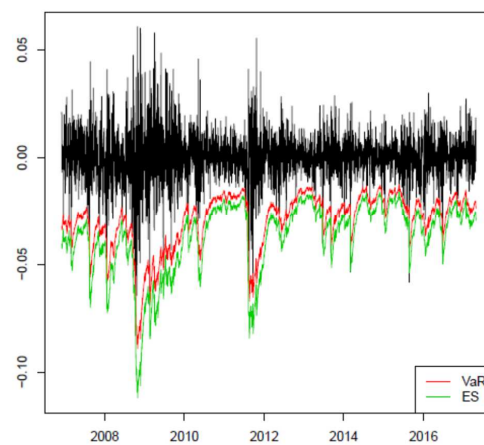
$$ES_{p,T+1} = \sigma_{T+1} \frac{1}{p} \int_0^p F_D^{-1}(s) ds$$

VaR i ES z modelu EWMA

1% VaR i ES z kalib. EWMA z r. norm. (RM)



1% VaR i ES z kalib. EWMA z r. t-Studenta



C. Modele GARCH

- Podstawowy model GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem normalnym:

$$r_t = \mu + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim D(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

gdzie $\omega > 0$ oraz $\alpha, \beta \geq 0$.

- Wariancja bezwarunkowa:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)}$$

- Rozszerzenia:
 - składnik losowy ma rozkład t -Studenta
 - asymetryczny wpływ wzrostów i spadków na wariancję: EGARCH, GJR-GRACH
 - wpływ stopy zwrotu na wariancję: GARCH-in-Mean

VaR i ES z modelu GARCH

- Model GARCH

$$r_t = \mu + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim D(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

- Na podstawie modelu liczymy prognozę dla wariancji:

$$\sigma_{T+1}^2 = \omega + \alpha \epsilon_T^2 + \lambda \sigma_T^2$$

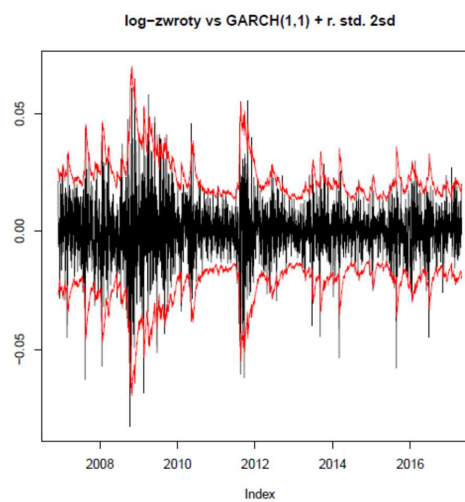
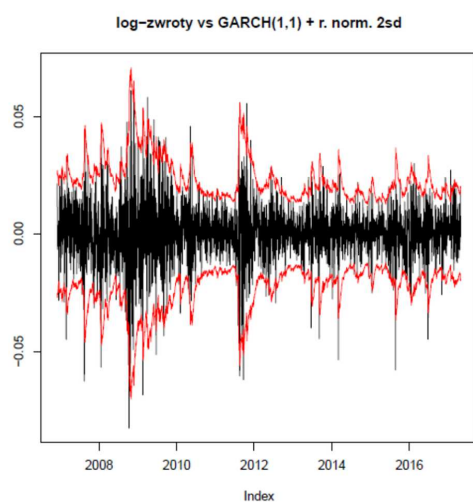
- Znając dystrybuantę F_D rozkładu D możemy policzyć VaR jako:

$$VaR_{p,T+1} = \mu + \sigma_{T+1} F_D^{-1}(p)$$

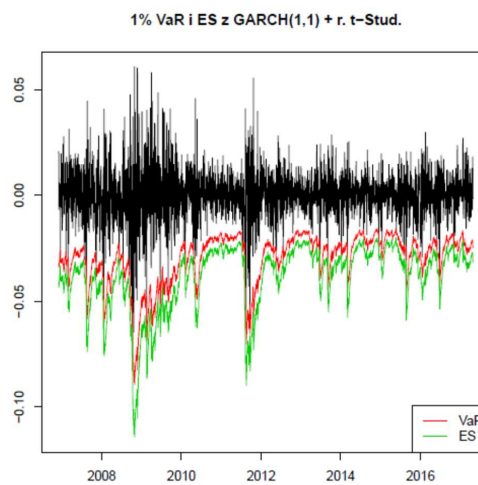
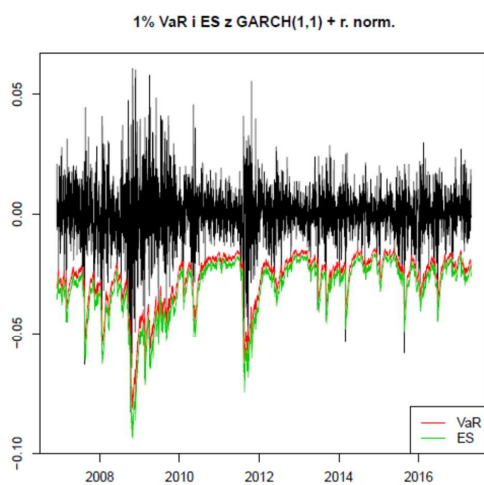
- Wartość ES wynosi natomiast

$$ES_{p,T+1} = \mu + \sigma_{T+1} \frac{1}{p} \int_0^p F_D^{-1}(s) ds$$

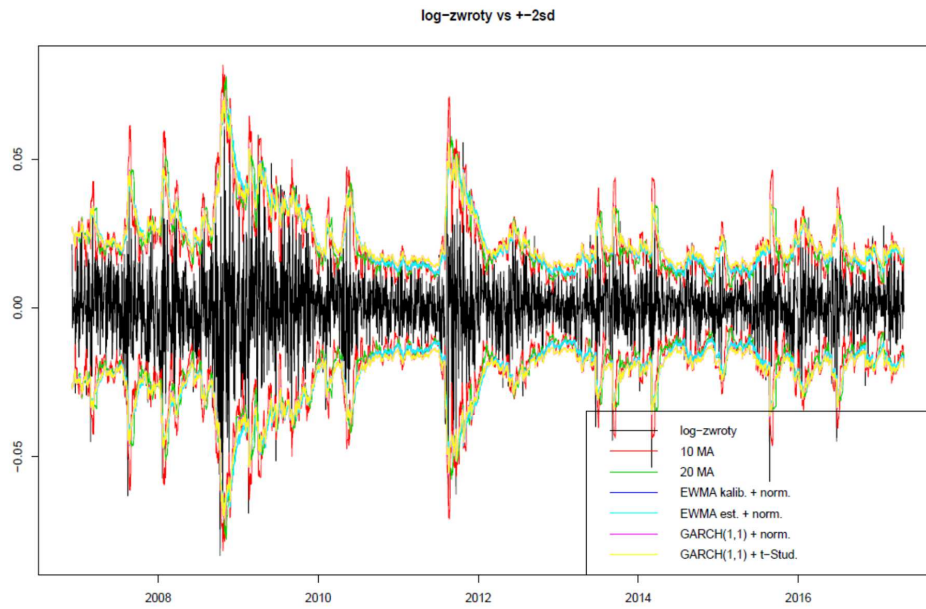
C. Modele GARCH



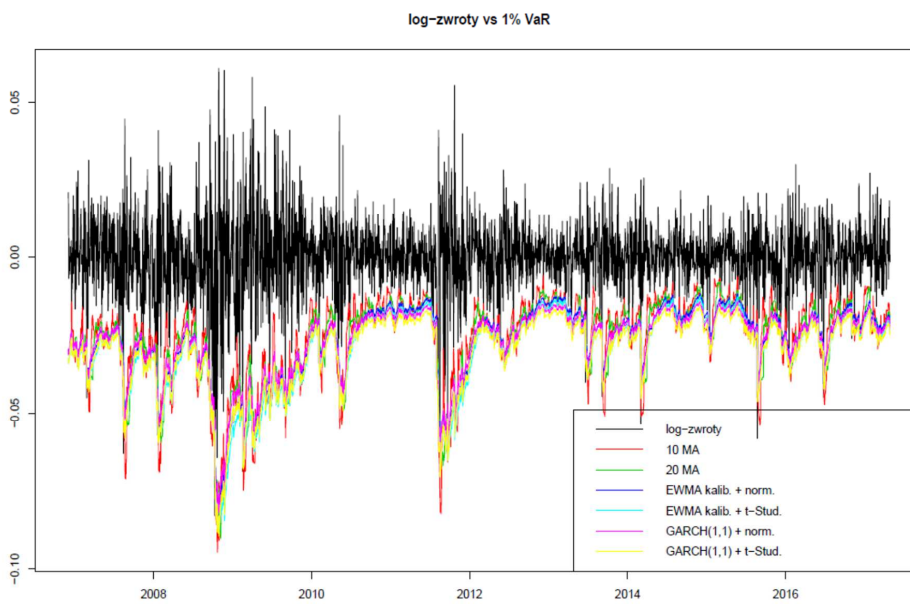
C. Modele GARCH: VaR i ES



Porównanie oszacowań zmienności



Porównanie VaR



Wybrane metody diagnostyki modeli GARCH

- Weryfikacja specyfikacji modelu GARCH polega zazwyczaj na analizie wystandaryzowanych reszt:

$$u_t = \frac{\epsilon_t}{\sigma_t}$$

- Reszty te powinny charakteryzować się:
 - brakiem autokorelacji
 - brakiem autokorelacji kwadratów
- QQ plot powinien się pokrywać z przyjętym rozkładem

$$u_t \sim D(0,1)$$

Temat 4: Zadania

Zadanie 4.1. Dla wybranego funduszu oszacowano następujący model GARCH:

$$r_t = 0.1 + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = 0.4 + 0.1\epsilon_{t-1}^2 + 0.8\sigma_{t-1}^2$$

gdzie r_t jest wyrażona w ujęciu %. Wiadomo także, że $r_T = -0.9$ oraz $\sigma_T^2 = 4$.

- Oblicz prognozę parametrów rozkładu dla r_{T+1}
- Wyznacz VaR i ES dla poziomu tolerancji 5% dla inwestycji na okres $T + 1$
- Jaka jest wartość wariancji bezwarunkowej?

Zadanie 4.2. Dla wybranego funduszu wykonaj następujące czynności:

- Wyznacz jednookresową prognozę zmienności przy użyciu omówionych metod (stała wariancja, MA, EWMA, GARCH). Przyjmij rozkład t-Studenta o $\nu = 5$
- Wyznacz 1% i 5% VaR dla powyższych metod
- Powtórz punkty 1 i 2 dla rozkładu normalnego.
- Stwórz tabelę z otrzymanymi wynikami

Prezentacja analiz z Tematów 1-4

Przygotuj prezentację na 5-6 minut, zawierającą następujące informacje:

- a. <1.0p> Informacje na temat funduszu (KIID), w tym opłat za nabycie/sprzedż jednostki
- b. <1.5p> Wykres danych historycznych za ostatnie 5 lat, własności stóp zwrotu (momenty, QQ plot, density plot)
- c. <1.5p> Wyniki oszacowania modelu GARCH (+ wybrane wykresy)
- d. <3.0p> Wartości VaR i ES dla horyzontu 1-okresowego (1% i 5%) obliczone na podstawie danych z ostatnich 5 lat z wykorzystaniem metod:
 - Symulacja historyczna
 - Rozkład parametryczny (normalny / t-Student)
 - Rozszerzenie Cornisha-Fishera
 - EWMA
 - GARCH

Uwaga: wszystkie wyniki proszę przedstawić w jednej, przejrzystej tabeli.

Wartości VaR/ES proszę podawać z dokładnością do 2 miejsca po przecinku.

- e. <1.0p> Wykres VaR względem poziomu tolerancji (od 0.1 do 10%) dla 5 powyższych metod
- f. <1.0p> Przeprowadź ogólną dyskusję na temat ryzyka inwestycji w dany fundusz

Dodatkowo, przyznawane są <1p> za jakość prezentacji i przygotowanie się wystąpienia. Przekroczenie limitu czasu 6 minut obniża ocenę. Proszę unikać dużej liczby slajdów (można się zmieścić na 7 slajdach: slajd tytułowy + 1 slajd na każdy punkt). Prezentację w pliku pdf o nazwie *ImieNazwisko.pdf* proszę przekazać prowadzącemu zajęcia.

Temat 5

VaR i ES dla dalszych horyzontów

- Metoda *square root of time*
- Rozszerzenie Cornisha-Fishera dla $H > 1$
- Symulacje Monte Carlo
- Bootstrap
- Wykorzystanie H -okresowych stóp zwrotu

Wartości VaR/ES dla dalszych horyzontów

- Dotychczas poznaliśmy metody liczenia VaR i ES dla najkrótszego możliwego horyzontu czasowego, tj. jednego okresu ($H=1$)
- W wielu przypadkach przy podejmowaniu decyzji potrzebujemy informacji na temat ryzyka inwestycji w dłuższym horyzoncie (tydzień, miesiąc, rok, 5 lat). W takim przypadku należy obliczyć VaR/ES dla zmiennej $y_H = \sum_{h=1}^H r_h$
- W obliczeniach stosuje się następujące metody:
 1. Analityczne (np, square root of time)
 2. Numeryczne (Monte Carlo, bootstrapping)
- Dla dalekich horyzontów (>1 miesiąc) warto uzupełnić analizy VaR analizami scenariuszowymi (kolejny temat)

A. Metody analityczne

Wartość oczekiwana i wariancja dla dalszych horyzontów

Założmy, że wartość oczekiwana i wariancja dla stopy zwrotu r_t wynosi:

Wartość oczekiwana: $\mu = E(r_t)$

Wariancja: $\sigma^2 = E((r_t - \mu)^2)$

Odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Jeżeli r_h są IID (independent and identically distributed) to wartości dla skumulowanej stopy zwrotu $y_H = \sum_{h=1}^H r_h$ są następujące:

Wartość oczekiwana: $\mu_H = H\mu$

Wariancja: $\sigma_H^2 = H\sigma^2$

Odchylenie standardowe: $\sigma_H = \sqrt{H}\sigma$

A. Metody analityczne

Rozkład normalny: metoda square root of time

- Jeżeli $r \sim N(\mu, \sigma^2)$ to dla jednookresowego horyzontu:

$$VaR = \mu + \sigma \Phi^{-1}(p) \quad \text{oraz} \quad ES = \mu + \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(p))}{p}$$

gdzie Φ i ϕ to dystrybuanta oraz f. gęstości rozkładu $N(0,1)$.

- Ponieważ $y_H = \sum_{h=1}^H r_h \sim N(H\mu, H\sigma^2)$ to:

$$VaR_H = H\mu + \sqrt{H}\sigma \Phi^{-1}(p) \quad \text{oraz} \quad ES_H = H\mu + \sqrt{H}\sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(p))}{p}$$

- Zakładając, że $\mu = 0$ uzyskujemy:

$$VaR_H = \sqrt{H}VaR \quad \text{oraz} \quad ES_H = \sqrt{H}ES$$

W takim przypadku mówimy o metodzie **square root of time**.

A. Metody analityczne

Metoda SRT w Basel II

Quantitative standards Basel II

- 99th percentile *VaR* must be computed on a daily basis
- In calculating *VaR* the minimum “holding period” will be 10 trading days. Banks may use *VaR* numbers calculated according to shorter holding periods scaled up to ten days by the **square root of time**
- The choice of sample period for calculating *VaR* is constrained to a minimum length of one year.
- banks will be free to use models based, for example, on variance-covariance matrices, historical simulations, or Monte Carlo simulations
- The multiplication factor will be set by individual supervisory authorities on the basis of their assessment of the quality of the bank’s risk management system, subject to an absolute minimum of 3. Banks will be required to add to this factor a “plus” directly related to the ex-post performance of the model, thereby introducing a built in positive incentive to maintain the predictive quality of the model. The plus will range from 0 to 1 based on the outcome of so-called “backtesting.”

Źródło: Basle Committee on Banking Supervision, 1996.

AMENDMENT TO THE CAPITAL ACCORD TO INCORPORATE MARKET RISKS ([link](#), s. 44)

A. Metody analityczne

Skośność i kurtoza dla dalszych horyzontów

- Dalsze momenty dla $r_t \sim D(\mu, \sigma^2)$:

$$\text{Skośność: } S = M_3/\sigma^3 \quad \text{gdzie } M_3 = E((r_t - \mu)^3)$$

$$\text{Kurtoza: } K = M_4/\sigma^4 - 3 \quad \text{gdzie } M_4 = E((r_t - \mu)^4)$$

- Jeżeli r_h są IID (Independent and identically distributed) to dla zmiennej $y_H = \sum_{h=1}^H r_h$ momenty są następujące:

$$\text{Skośność: } S_H = S/\sqrt{H}$$

$$\text{Kurtoza: } K_H = K/H$$

A. Metody analityczne

Metoda Cornisha-Fischera dla dalszych horyzontów

Wzór Cornisha-Fischera dla $H = 1$:

$$VaR = \mu + \sigma \left(\gamma_p + \frac{\gamma_p^2 - 1}{6} S + \frac{\gamma_p^3 - 3\gamma_p}{24} K - \frac{2\gamma_p^3 - 5\gamma_p}{36} S^2 \right)$$

gdzie $\gamma_p = \Phi^{-1}(p)$

Wzór Cornisha-Fischera dla dowolnego H :

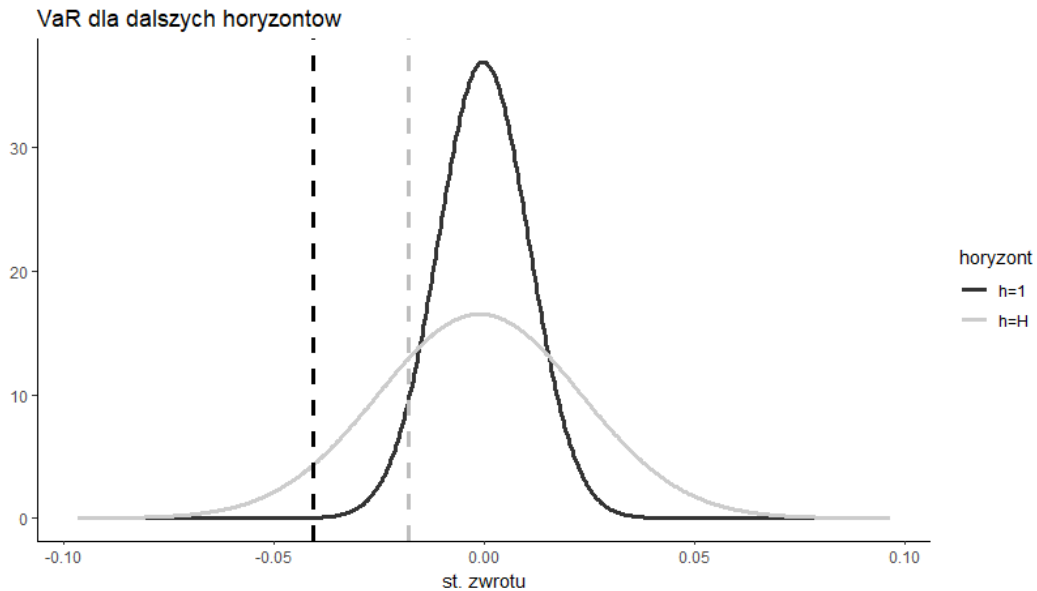
$$VaR_H = \mu H + \sigma \sqrt{H} \left(\gamma_p + \frac{\gamma_p^2 - 1}{6} \frac{S}{\sqrt{H}} + \frac{\gamma_p^3 - 3\gamma_p}{24} \frac{K}{H} - \frac{2\gamma_p^3 - 5\gamma_p}{36} \frac{S^2}{H} \right)$$

Wzór Cornisha-Fischera w Rozporządzeniu Komisji Europejskiej: Regulatory Technical Standards (RTS) for packaged retail and insurance-based investment products (PRIIPs) - [link](#)

$$\text{Exp} \left[M1 * N + \sigma \sqrt{N} * \left(-1,28 + 0,107 * \mu_1 / \sqrt{N} + 0,0724 * \mu_2 / N - 0,0611 * \mu_1^2 / N \right) - 0,5 \sigma^2 N \right]$$

A. Metody analityczne.

Wyniki dla WIG



B. Metody numeryczne

Symulacje Monte Carlo

- Załóżmy, że znamy model opisujący process generujący dane
ang. data generating process, DGP
- Etapy MC wyznaczenia VaR/ES dla dowolnego H :
 1. Generujemy ścieżkę stóp zwrotu r_1, r_2, \dots, r_H do horyzontu H
 2. Liczymy skumulowaną ścieżkę $y_H = \sum_{h=1}^H r_h$
 3. Powtarzamy kroki (1)-(2) „ N ” razy i zapisujemy $y_H^{(n)}$ dla $n = 1, 2, \dots, N$
 4. Porządkujemy skumulowane stopy od najmniejszej do największej

$$y_{S_H}^{(1)} \leq y_{S_H}^{(2)} \leq \dots$$

1. Wyznaczamy $M = \text{floor}(pN)$
2. Liczymy :

$$VaR_H = y_{S_H}^{(M)} \text{ oraz } ES_H = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_{S_H}^{(i)}$$

B. Metody numeryczne

Symulacje Monte Carlo dla rozkładu normalnego

Przykład dla $r \sim N(\mu, \sigma^2)$

▪ Etapy MC wyznaczenia VaR/ES dla dowolnego H :

1. Losujemy H wartości r_1, r_2, \dots, r_H z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$
2. Liczymy ścieżkę $y_H = \sum_{h=1}^H r_h$
3. Powtarzamy kroki (1)-(2) „ N ” razy i zapisujemy $y_H^{(n)}$
4. Porządkujemy skumulowane stopy

$$y_{S_H}^{(1)} \leq y_{S_H}^{(2)} \leq \dots$$

1. Wyznaczamy $M = \text{floor}(pN)$
2. liczymy :

$$VaR_H = y_{S_H}^{(M)} \text{ oraz } ES_H = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_{S_H}^{(i)}$$

B. Metody numeryczne

Symulacje Monte Carlo dla rozkładu t-Studenta

Przykład dla $r \sim t_v(\mu, \sigma^2)$

▪ Etapy MC wyznaczenia VaR/ES dla dowolnego H :

1. Losujemy H wartości t_1, t_2, \dots, t_H z rozkładu t_v
2. Wyznaczamy r_1, r_2, \dots, r_H według wzoru $r_h = \mu + \sigma \times t_h \sqrt{\frac{v-2}{v}}$
3. Liczymy ścieżkę $y_H = \sum_{h=1}^H r_h$
4. Powtarzamy kroki (2)-(4) „ N ” razy i zapisujemy $y_H^{(n)}$
5. Porządkujemy skumulowane stopy

$$y_{S_H}^{(1)} \leq y_{S_H}^{(2)} \leq \dots$$

1. Wyznaczamy $M = \text{floor}(pN)$
2. Liczymy :

$$VaR_H = y_{S_H}^{(M)} \text{ oraz } ES_H = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_{S_H}^{(i)}$$

B. Metody numeryczne

Symulacje Monte Carlo dla modelu GARCH

Przykład dla $r_t \sim \text{GARCH}$

▪ Etapy MC wyznaczenia VaR/ES dla dowolnego H :

1. Szacujemy parametry modelu GARCH
2. Dokonujemy symulacji ścieżki r_1, r_2, \dots, r_H warunkowo względem ostatniej obserwacji w próbie
3. Liczymy ścieżkę $y_H = \sum_{h=1}^H r_h$
4. Powtarzamy kroki (2)-(3) „ N ” razy i zapisujemy $y_H^{(n)}$
5. Porządkujemy skumulowane stopy

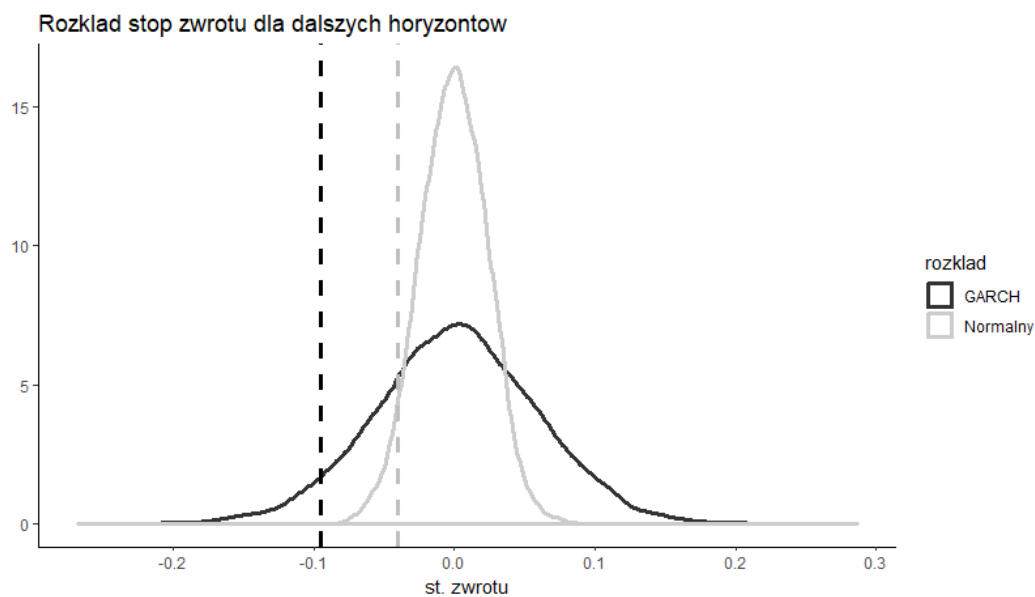
$$y_{S_H}^{(1)} \leq y_{S_H}^{(2)} \leq \dots$$

1. Wyznaczamy $M = \text{mod}(pN)$
2. Liczymy :

$$\text{VaR}_H = y_{S_H}^{(M)} \text{ oraz } \text{ES}_H = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_{S_H}^{(i)}$$

A. Metody numeryczne

Symulacje Monte Carlo



C. Metody numeryczne

Bootstrap – czyli symulacja historyczna przy założeniu IID

Jeżeli założymy, że stopy są IID, to możemy zastosować symulację historyczną

- Etapy bootstrapu wyznaczenia VaR/ES dla dowolnego H :

1. Losujemy z powtarzaniem H st. zwrotu r_1, r_2, \dots, r_H z historycznej próby $r_{1:T}$
2. Liczymy skumulowaną ścieżkę $y_H = \sum_{h=1}^H r_h$
3. Powtarzamy kroki (1)-(2) „ N ” razy i zapisujemy $y_H^{(n)}$ dla $n = 1, 2, \dots, N$
4. Porządkujemy skumulowane stopy od najmniejszej do największej

$$y_{S_H}^{(1)} \leq y_{S_H}^{(2)} \leq \dots$$

1. Wyznaczamy $M = \text{floor}(pN)$
2. Liczymy :

$$VaR_H = y_{S_H}^{(M)} \text{ oraz } ES_H = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M y_{S_H}^{(i)}$$

A co gdy stopy są zautokorelowane?

Metoda 1. Próbuje opisać DGP przez model (np. GARCH, ARMA) i przeprowadzamy symulacje MC modelu.

Metoda 2. Przeprowadzamy obliczenia dla H -okresowych stóp

$$r_{t,h} = \ln P_t - \ln P_{t-h}$$

Dalsze obliczenia są prowadzone jak dla VaR ma jeden okres

Uwaga: w metodzie 2 liczba obserwacji wynosi $\text{floor}(T/h)$, co stanowi problem przy przeprowadzaniu backtestingu z powodu niskiej liczby obserwacji.

Porównanie modeli

	VaR_5	ES_5
rozk. norm.	-0,0323	-0,0419
Cornish-Fischer	-0,0335	
rozk. norm. MC	-0,0330	-0,0435
rozkład t MC	-0,0312	-0,0458
GARCH MC	-0,0312	-0,0403
HS, bootstrap	-0,0318	-0,0439
rozkł. norm. (H-okresowe stopy)	-0,0327	-0,0410

Temat 5: Zadania

Zadanie 5.1. Logarytmiczne stopy zwrotu dla pewnego aktywa mają rozkład normalny o parametrach $N(1; 2^2)$. Oblicz VaR oraz ES dla $H = 1$, $H = 4$ oraz $H = 9$ oraz dla poziomu tolerancji $p = 1\%$ oraz $p = 5\%$ jeżeli wiadomo, że dla rozkładu $N(0,1)$ wartości VaR i ES są następujące

p	0.5	0.1	0.05	0.025	0.01	0.001
VaR	0	1.282	1.645	1.960	2.326	3.090
ES	0.798	1.755	2.063	2.338	2.665	3.367

Zadanie 5.2. Oblicz VaR dla $H = 4$ za pomocą wzoru Cornisha-Fischera dla aktywa, którego stopy zwrotu mają następujące charakterystyki: $\mu = 0.5\%$, $\sigma = 5\%$, $S = -1$, $K = 7$. Przyjmij poziom tolerancji $p = 0.05$ oraz 0.025 . [$\Phi^{-1}(0.05) = -1.645$ oraz $\Phi^{-1}(0.025) = -1.960$]

Temat 5: Zadania

Zadanie 5.3. Dla szeregów czasowych opisujących wycenę wybranego funduszu inwestycyjnego, oblicz wartości VaR i ES dla $H = 10$ na podstawie 6 omawianych metod (norm, CF, t, GARCH, boot, norm H -okresowe) dla poziomu tolerancji 5%. Czy wyniki się różnią? Powtórz obliczenia dla poziomu tolerancji 1%.

Zadanie 5.4* Stwórz kody w programie R, pozwalające na liczenie VaR i ES z modelu EWMA z rozkładem normalnym dla dowolnego horyzontu H . Oblicz VaR i ES dla $H = 10$ i porównaj z wynikami z modelu GARCH (Zadanie 5.3)

Zadanie 5.5* Stwórz kody w programie R, pozwalające na liczenie VaR i ES z modelu EWMA z rozkładem historycznym dla dowolnego horyzontu H . Oblicz VaR i ES dla $H = 10$ i porównaj z wynikami z modelu GARCH (Zadanie 5.3) oraz EWMA-norm (Zadanie 5.4)

Temat 6

Testy warunków skrajnych: stress tests

- Stress test a VaR/ES
- Analiza wrażliwości
- Analizy scenariuszowe
- Scenariusz historyczny i hipotetyczny
- VaR w sytuacji skrajnej (Stressed-VaR)

Test warunków skrajnych: stress tests

Testy warunków skrajnych polegają na ocenie wpływu na wartość portfela (funkcjonowanie firmy, systemu finansowego) wydarzeń o niskiej szansie zmaterializowania się (wydarzeń nadzwyczajnych), ale o potencjalnie dużych negatywnych skutkach

Przykłady:

- krach na giełdzie
- dewaluacja waluty
- utrata płynności
- bankructwo dłużnika
- utrata ważnego klienta



Na poziomie indywidualnym odpowiednikiem są np. crash testy samochodów

Test warunków skrajnych: stress tests

Wartość zagrożona / oczekiwana strata:

- normalne uwarunkowania rynkowe
- krótki horyzont czasowy
- podejście probabilistyczne

Testy warunków skrajnych:

- nietypowe/kryzysowe uwarunkowania rynkowe
- dłuższy horyzont czasowy
- podejście scenariuszowe

Ważne:

Wartość zagrożona i testy warunków skrajnych są **komplementarnymi** miarami ryzyka

Testy warunków skrajnych: schemat dla pełnego modelu

Etap 1. Analiza wrażliwości (sensitivity analysis)

reakcja portfela na zmiany czynników ryzyka (risk factors), m.in.:

- wartości indeksów giełdowych,
- położenie krzywej dochodowości,
- kursy walutowe,
- ceny surowców.

Etap 2. Analizy scenariuszowe (scenario analysis)

ocena jak zmieni się wartość portfela przy różnych uwarunkowaniach, np. :

- credit crunch,
- ogłoszenie niewypłacalności przez głównego klienta,
- nasilenie się ataków terrorystycznych,
- pandemia

Etap 3. Testy warunków skrajnych

warunek skrajny = najgorszy możliwy scenariusz

Testy warunków skrajnych: jakie scenariusze?

1. Scenariusze historyczne, przykładowo:

- Wielki kryzys z lat 30-tych
- Kryzys ERM z 1992 r.
- Kryzys azjatycki z 1997 r.
- Kryzys finansowy z lat 2007-2009

Wartość WIG:

9 lipca 2007:	67 772,91
18 lutego 2009:	20 370,29

spadek o 70% w półtora roku

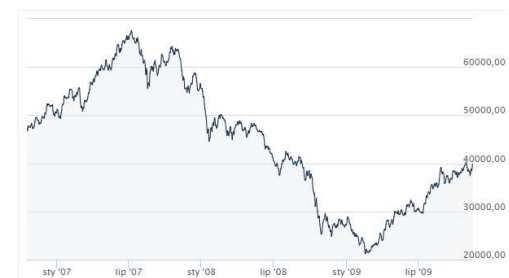
Kurs EUR/PLN:

31 lipca 2008:	3,20 PLN/EUR
18 lutego 2009:	4,90 PLN/EUR

deprecjacja o 35% w pół roku

- Pandemia COVID-19

WIG



Testy warunków skrajnych: jakie scenariusze?

2. Scenariusze hipotetyczne, tj. zdarzenia, które niekoniecznie miały miejsce w przeszłości, ale mogą się wydarzyć w przyszłości

- gwałtowne zmiany klimatyczne
- ogłoszenie niewypłacalności przez rząd
- wprowadzenie nowych regulacji
- Brexit / Polexit
- Atak Korei Północnej na K. Południową



Testy warunków skrajnych: jakie scenariusze?

3. „Standardowe” scenariusze hipotetyczne

przykładowo zaproponowane przez [Derivatives Policy Group \(1995\)](#):

- parallel yield curve shifts of 100 basis points up and down
- steepening and flattening of the yield curves (2's to 10's) by 25 basis points;
- increase and decrease in equity index values by 10 percent
- increase and decrease in the exchange value of foreign currencies by 6 percent (major currencies) and 20 percent (other currencies)
- increase and decrease in swap spreads by 20 basis points.

Test warunków skrajnych: przykład

Przykładowy skład portfela:

- A1, 40%: krajowe obligacje rządowe, średni czas trwania (duracja) 5 lat
- A2, 10%: krajowe obligacje korporacyjne, średni czas trwania (duracja) 3 lata
- A3, 30%: akcje krajowe
- A4, 20%: akcje zagraniczne

Etap 1. Analiza wrażliwości:

	A1	A2	A3	A4	Portfel
RF1: 1% zmiana wartości indeksów giełdowych (w kraju i zagranicą)	0%	0%	1%	1%	0,5%
RF2: wzrost krzywej dochodowości na całej długości o 100 pb.	-5%	-3%	0%	0%	-2,3%
RF3: deprecjacja kursu o 1%	0%	0%	0%	1%	0,2%
RF4: wzrost spreadu na obligacjach korporacyjnych o 100 pb.	0%	-3%	0%	0%	-0,3%
RF5: wzrost cen surowców o 1%	0%	0%	0%	0%	0,0%

Oznaczenia: RF - Risk factor, A - asset

Test warunków skrajnych : przykład

	Portfel
RF1: 1% zmiana wartości indeksów giełdowych (w kraju i zagranicą)	0,5%
RF2: wzrost krzywej dochodowości na całej długości o 100 pb.	-2,3%
RF3: deprecjacja kursu o 1%	0,2%
RF4: wzrost spreadu na obligacjach korporacyjnych o 100 pb.	-0,3%
RF5: wzrost cen surowców o 1%	0,0%

Analiza wrażliwości

Analiza scenariuszowa

	Portfel
S1: Spadek/wzrost indeksów giełdowych (w kraju i zagranicą) o 10%	±5,0%
S2: Spadek/wzrost krzywej dochodowości na całej długości o 100 pb.	±2,3%
S3: Aprecjacja/deprecjacja kursu złotego o 20%	±4,0%
S4: Spadek/ wzrost spreadu na obligacjach korporacyjnych o 100 pb.	±0,3%

Wartość portfela dla najgorszego scenariusza, czyli:

spadek indeksów, wzrost st. proc., aprecjacja kursu i wzrost spreadu

$$\Delta \ln(P) = -5\% - 2,3\% - 4,0\% - 0,3\% = -11,6\%$$

Testy warunków skrajnych: jakie scenariusze?

Scenariuszem może być hipotetyczny **rozkład dla stóp zwrotu**

głównie wyższe odchylenie standardowe lub korelacje, ale także inne momenty

Przykładowo, wśród „standardowych” scenariuszy hipotetycznych zaproponowanych przez [Derivatives Policy Group \(1995\)](#) znajdziemy:

- increase and decrease in all 3-month yield **volatilities by 20 percent**,
- increase and decrease in equity index **volatilities by 20 percent**,
- increase and decrease in foreign exchange rate **volatilities by 20 percent**.

W przypadku scenariuszy historycznych, wyszukujemy okresów o podwyższonej zmienności, wysokich korelacjach czy dużych spadkach

Wartość zagrożona w sytuacji skrajnej: stressed VaR, S-VAR

Wartość zagrożona w sytuacji skrajnej obliczana jest z zastosowaniem podobnej metodologii, jak w przypadku zwykłej miary wartości zagrożonej. Różnica polega na tym, że **S-VaR** jest liczony przy bardziej konserwatywnych założeniach dotyczących rozkładu stóp zwrotu (niższa oczekiwana stopa zwrotu, podwyższona zmienność, itp.)

Przykładem może być metodologia liczenia scenariusza skrajnego w dokumencie:

rozporządzenie Parlamentu Europejskiego i Rady (UE) nr 1286/2014 w sprawie dokumentów zawierających kluczowe informacje (KID) dla detalicznych produktów zbiorowego inwestowania i ubezpieczeniowych produktów inwestycyjnych (PRIIP) przez ustanowienie regulacyjnych standardów technicznych (RTS) – załącznik V ([link](#))

$$\text{Scenario}_{\text{Stress}} = e \left[{}^w\sigma_S \cdot \sqrt{N} \cdot \left(z_\alpha + \left[\frac{(z_\alpha^2 - 1)}{6} \right] \cdot \frac{\mu_1}{\sqrt{N}} + \left[\frac{(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)}{24} \right] \cdot \frac{\mu_2}{N} - \left[\frac{(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)}{36} \right] \cdot \frac{\mu_1^2}{N} \right) - 0,5 {}^w\sigma_S^2 N \right]$$

W którym zastosowano wzór Cornisha-Fischera i przyjęto, że:

- wartość oczekiwana jest wynosi $\mu = 0$
- $0 {}^w\sigma_S$ 99 percentyl rolowanego odch. std. dla 21-dniowego okna
- z_α to 1 percentyl rozkładu normalnego

Wartość zagrożona w sytuacji skrajnej: stressed VaR, S-VAR

Przykładem może być metodologia liczenia scenariusza skrajnego w dokumencie:

rozporządzenie Parlamentu Europejskiego i Rady (UE) nr 1286/2014 w sprawie dokumentów zawierających kluczowe informacje (KID) dla detalicznych produktów zbiorowego inwestowania i ubezpieczeniowych produktów inwestycyjnych (PRIIP) przez ustanowienie regulacyjnych standardów technicznych (RTS) – załącznik V ([link](#))

$$\text{Scenario}_{\text{Stress}} = e \left[{}^w\sigma_S * \sqrt{N} * \left(z_\alpha + \left[\frac{(z_\alpha^2 - 1)}{6} \right] * \frac{\mu_1}{\sqrt{N}} + \left[\frac{(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)}{24} \right] * \frac{\mu_2}{N} - \left[\frac{(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)}{36} \right] * \frac{\mu_1^2}{N} \right) - 0,5 {}^w\sigma_S^2 N \right]$$

gdzie dla horyzontu krótszego niż rok:

- ${}^w\sigma_S$ to 99 percentyl rolowanego odch. std. dla okna 21-dniowego
- z_α to 1 percentyl rozkładu normalnego

Porównując do wzoru Cornisha-Fishera dla VaR o horyzontie H :

$$\text{VaR}_H = \mu H + \sigma \sqrt{H} \left(\gamma_p + \frac{\gamma_p^2 - 1}{6} \frac{S}{\sqrt{H}} + \frac{\gamma_p^3 - 3\gamma_p}{24} \frac{K}{H} - \frac{2\gamma_p^3 - 5\gamma_p}{36} \frac{S^2}{H} \right)$$

można zauważyć, że w scenariuszu skrajnym nastąpiła zmiana odchylenia std. oraz przyjęto, że oczekiwana stopa zwrotu wynosi $\mu = 0$.

Temat 6. Zadania

Zadanie 6.1. Dla wybranego przez siebie funduszu określ (jakościowo), jaki byłby wynik testów skrajnych dla standardowych scenariuszy

- przesunięcie krzywej dochodowości o 100 pb,
- zmiana cen akcji o 10%,
- deprecjacja złoteo o 20%,
- zmiana ryzyka kredytowego o 100 pb.

Zadanie 6.2. Na podstawie danych dla wybranego przez siebie funduszu opisz scenariusz historyczny pozwalający określić, jakiej największej straty można się spodziewać w horyzoncie najbliższego roku.

Zadanie 6.3. Portfel funduszu (rozliczanego w PLN) zawiera 2 klasy aktywów: O1 – obligacje korporacyjne polskie, średni czas trwania 2 lata, O2 – obligacje skarbowe niemieckie, średni czas trwania 5 lat.

- Przeprowadź analizę wrażliwości składowych portfela na następujące czynniki ryzyka:
 - RF1 – deprecjacja PLN wzg. EUR o 1%,
 - RF2 – globalne przesunięcie krzywych dochodowości o 100pb w górę,
 - RF3 – wzrost spreadu na obligacjach korporacyjnych o 100pb.
 - Zakładamy scenariusz polegający na:
 - deprecjacji PLN wzg. EUR o 15%,
 - globalnym wzroście stóp procentowych o 150pb,
 - wzroście ryzyka obligacji korporacyjnych i spreadu o 200pb.
- Oszacuj, jak zmieni się w tym scenariuszu wartość portfela, jeżeli udziały O1 i O2 wynoszą 60% i 40%.

Temat 6. Zadania

Zadanie 6.4. Dla szeregu czasowego opisującego stopy zwrotów wybranego funduszu inwestycyjnego oblicz wartości VaR o horyzoncie 1 rok ($H=250$) z modelu zakładającego rozkład normalny stóp zwrotu. Przyjmij poziom tolerancji $p = 1\%$ oraz metodę square root of time.

W scenariuszu skrajnym przyjmij, że μ^* jest minimalną, zaś σ^* jest maksymalną wartością rolowanej średniej / odchylenia standardowego w oknie o szerokości 3 miesiące. Oblicz wartość S-VaR przy powyższych założeniach.

Zadanie 6.5. Dla szeregów czasowych opisujących wycenę wybranego funduszu inwestycyjnego, oblicz wartości VaR o horyzoncie 1 rok (250 dni) z modelu Cornisha-Fishera dla poziomu tolerancji $\alpha = 1\%$. Przyjmij, że w scenariuszu skrajnym $\mu^* = 0$, zaś σ^* jest 99 percentylem rolowanego odchylenia standardowego w okienku 21 dni. Oblicz wartość S-VaR przy powyższych założeniach.

Temat 7

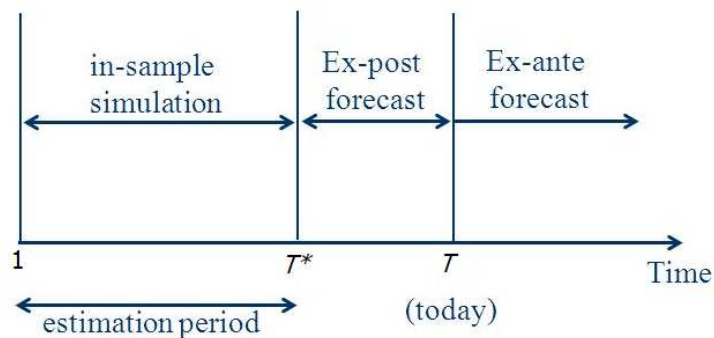
Weryfikacja modelu ryzyka: Backtesting

- Procedura backtestingu
- Przekroczenia VaR a poziom tolerancji
- Rozkład dwumianowy
- Metoda świateł
- Test niezależnego pokrycia (test Kupca)
- Test zależnego pokrycia (test Christoffersena)
- Moc testów
- Test McNeila i Freya dla oczekiwanej straty

Backtesting - podstawy

Jak ocenić jakość metody wyznaczania VaR/ES

- Dopasowanie modelu w próbie nie jest najlepszym sposobem określenia jakości modelu ryzyka
- VaR/ES dotyczy przyszłych stóp zwrotu, a zatem ma to być dobry **model prognostyczny**
- Backtesting polega na ocenie jak model sprawowałby się, gdyby był wykorzystywany w przeszłości
- Oceniamy jakość prognoz VaR/ES ex-post



Procedura backtestingu

próba	1	2	3	4	...	$T^* - 1$	T^*	$T^* + 1$	$T^* + 2$	$T^* + 3$...	$T - 2$	$T - 1$	T
test	*	*	*	*	...	*	*	*	*	*	...	*	*	*
1	*	*	*	*	...	*	*	*	*	*	...	*	*	*
2		*	*	*	...	*	*	*	*	*	...	*	*	*
3			*	*	...	*	*	*	*	*	...	*	*	*
...							
n-1					...				*	*	...	*	*	*
n					...				*	*	...	*	*	*

* - okna estymacji, * - prognozy w 1 kroku

Ustalamy:

- podział próby na okres estymacji i ewaluacji modelu (T^*)
- poziom tolerancji (p) oraz horyzont (H)
- schemat backtestingu: rolowane vs. rekursywne okna estymacji

Otrzymujemy szeregi (o długości $n = T - T^*$):

1. prognoz: $\text{VaR}_{t+1}, t = T^*, \dots, T - 1$
2. realizacji: $r_{t+1}, t = T^* + 1, \dots, T - 1$
3. przekroczeń: $\eta_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } r_{t+1} \leq \text{VaR}_{t+1} \\ 0, & \text{jeżeli } r_{t+1} > \text{VaR}_{t+1} \end{cases}$

Przekroczenia VaR

Dla szeregu przekroczeń:

$$\eta_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } r_{t+1} \leq \text{VaR}_{t+1} \\ 0, & \text{jeżeli } r_{t+1} > \text{VaR}_{t+1} \end{cases}$$

wyznaczamy:

- Liczbę przekroczeń:

$$n_1 = \sum_{t=T^*}^{T-1} \eta_{t+1}$$

- Liczbę braku przekroczeń:

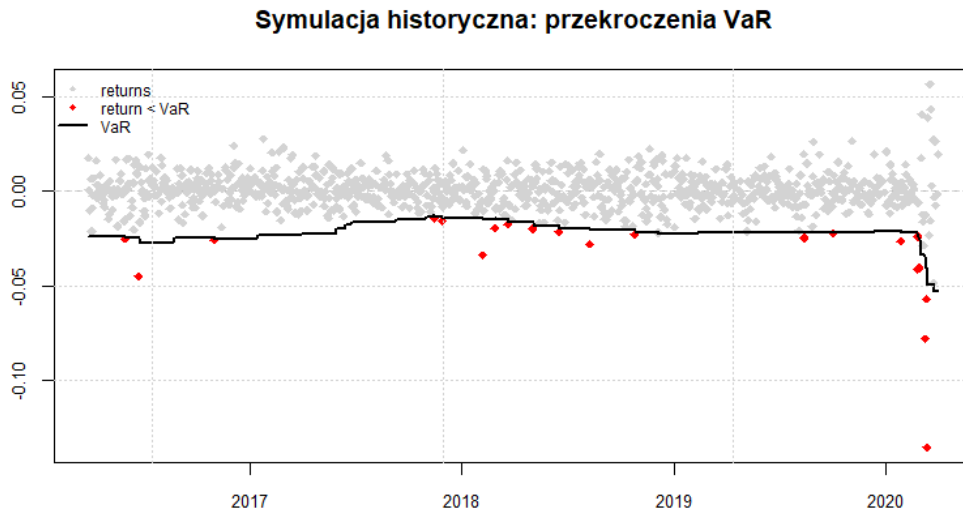
$$n_0 = n - n_1$$

- Empiryczny udział przekroczeń:

$$\pi = \frac{n_1}{n} = \frac{n_1}{n_0 + n_1}$$

- Oczekujemy, że $\pi \approx p$!

Przekroczenia VaR - ilustracja



Bazylea II: metoda świateł

Wg uregulowań Bazylei II, wielkość rezerwy z tytułu ryzyka rynkowego na dzień t jest wyznaczana jako

$$\Xi_t \max \{ \text{VaR}_{t+10}, \overline{\text{VaR}}_t \},$$

gdzie:

- VaR_{t+10} to VaR o horyzoncie 10 dni roboczych o poziomie tolerancji 1%,
- $\overline{\text{VaR}}_t$ to średnia z poprzednich 60 wartości VaR_{t+10}
- Ξ_t zależy od liczby przekroczeń n_1 w poprzednich 250 dniach

$$\Xi_t = \begin{cases} 4, & \text{gdy } 10 \leq n_1, \\ 3 + \varphi(n_1) & \text{gdy } 5 \leq n_1 \leq 9, \\ 3, & \text{gdy } n_1 \leq 4, \end{cases}$$



- Jakie jest źródło wartości dla Ξ_t ?

Rozkład liczby przekroczeń

- Oczekujemy, że poszczególne wartości w szeregu przekroczeń są niezależne i mają rozkład Bernoulliego:

$$P(\eta_t = 1) = p,$$

$$P(\eta_t = 0) = 1 - p.$$

- Zatem liczba przekroczeń n_1 ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$ z parametrami n i p .
- Jakie liczby przekroczeń dają podstawy do odrzucenia modelu dla $n = 250$ i $p = 5\%$? Jakie dla $p = 1\%$?

Rozkład n_1 dla $n = 250$

n_1	$p = 5\%$		$p = 1\%$	
	pdf	cdf	pdf	cdf
0	0.0	0.0	8.1	8.1
1	0.0	0.0	20.5	28.6
2	0.0	0.0	25.7	54.3
3	0.1	0.1	21.5	75.8
4	0.3	0.5	13.4	89.2
5	0.9	1.3	6.7	95.9
6	1.8	3.1	2.7	98.6
8	5.4	11.9	0.3	99.9
10	9.6	29.1	0.0	100.0
12	11.6	51.8	0.0	100.0
14	10.0	72.9	0.0	100.0
16	6.4	87.5	0.0	100.0
18	3.1	95.3	0.0	100.0
20	1.2	98.5	0.0	100.0

Bazylea II: metoda świateł

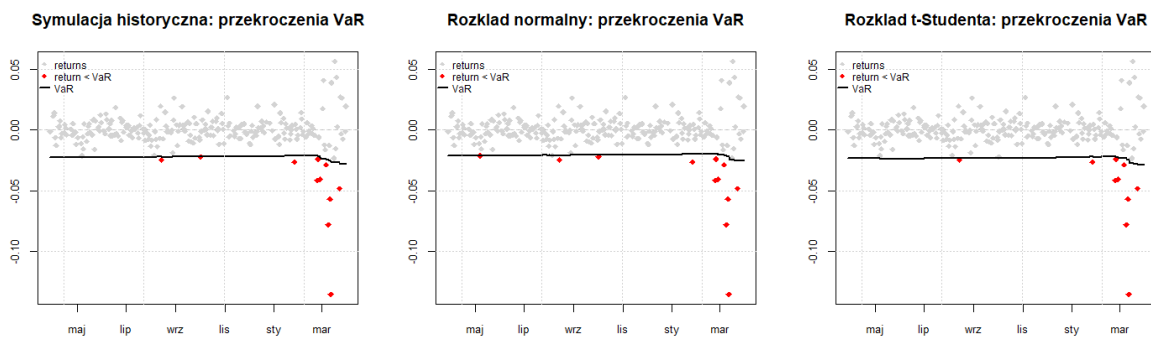
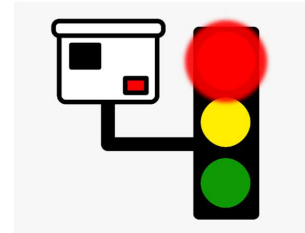
Zakres	n_1	Ξ	cdf(%)
■	0	3	8.11
■	1	3	28.58
■	2	3	54.32
■	3	3	75.81
■	4	3	89.22
■	5	3+0.40	95.88
■	6	3+0.50	98.63
■	7	3+0.65	99.60
■	8	3+0.75	99.89
■	9	3+0.85	99.97
■	10+	4	99.99

Quantitative standards Basel II

e. The multiplication factor will be set by individual supervisory authorities on the basis of their assessment of the quality of the bank's risk management system, subject to an absolute minimum of 3. Banks will be required to add to this factor a "plus" directly related to the ex-post performance of the model, thereby introducing a built in positive incentive to maintain the predictive quality of the model. The plus will range from 0 to 1 based on the outcome of so-called "backtesting."

Metoda świateł: przykład dla lat 2019 - 2020

- Symulacja historyczna i modele parametryczne (normalny i t-student)
- Liczymy liczbę przekroczeń na oknach szerokości 250 obs. w okresie 28-03-2019 do 31-03-2020.
- Liczby przekroczeń odpowiednio: 12, 13, 11.



Temat 7. Zadania

Zadanie 7.1. Zastosuj metodę świateł do szeregu czasowego notowań wybranego funduszu, metody symulacji historycznej i 1% VaR. Porównaj otrzymane wyniki z wynikami dla WIG z zajęć.

Zadanie 7.2. Zaproponuj test metodą świateł dla okna testowego szerokości 250 obs. i poziomu tolerancji $p=5\%$, analogiczny do wytycznych Bazylei II dla $p=1\%$. Przeprowadź wnioskowanie dla szeregu czasowego notowań wybranego funduszu. Jak zmieniły się wyniki w porównaniu z $p=1\%$ (Zadanie 7.1)?

Zadanie 7.3. Na podstawie n obserwacji przeprowadzono backtesting modelu VaR dla poziomu tolerancji p . Niech $\pi = n_1/n$ oznacza udział przekroczeń VaR, gdzie n_1 to liczba przekroczeń VaR. Wyznacz 95% przedział ufności (lewostronny i dwustronny) dla n_1 oraz π wykorzystując funkcje dbinom/pbinom/qbinom w R dla:

- $n = 250, p = 1\%$
- $n = 250, p = 5\%$
- $n = 100, p = 5\%$
- $n = 100, p = 5\%$

Omów wyniki.

Zadanie 7.4* Zastosuj metodę świateł do szeregu czasowego notowań wybranego funduszu, metody EWMA i 1% VaR. Porównaj otrzymane wyniki do wyników z zadania 7.1.

Testy pokrycia i niezależności

Formalny backtesting modelu: jakie własności weryfikujemy?

- 1. Właściwe pokrycie:**
Zgodność udziału przekroczeń z poziomem tolerancji
- 2. Niezależność przekroczeń:**
Brak grupowania przekroczeń (czyli brak autokorelacji).

Testy oparte na regresji MNK

Pokrycie. Dla modelu:

$$\eta_t = \pi + \varepsilon_t$$

$$H_0: \pi = p$$

Niezależność. Dla modelu:

$$\eta_t = \pi + \rho\eta_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$H_0: \rho = 0$$

Niezależne pokrycie. Dla modelu:

$$\eta_t \sim \pi + \rho\eta_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$H_0: \pi = p \wedge \rho = 0$$

Uwaga. Testy niepoprawne, bo zakładamy, że ε_t ma r. normalny.

Backtesting 1% VaR dla WIG.

	HS	Norm.	t-stud.
Pokrycie			
$\hat{\pi}$	0,012	0,012	0,004
p-value	0,772	0,772	0,134
Niezależność			
$\hat{\rho}$	-0,012	-0,012	-0,004
p-value	0,848	0,848	0,949
Niezależne pokrycie			
$\hat{\pi}$	0,012	0,012	0,004
$\hat{\rho}$	-0,012	-0,012	-0,004
p-value	0,940	0,940	0,330

Test rozkładu dwumianowego dla pokrycia

- Przy założeniu, że metoda perfekcyjnie wyznacza VaR na poziomie tolerancji p , szereg przekroczeń powinien mieć rozkład $B(n, p)$.
- Dla $H_0: \pi = p$ 95% przedziały ufności, tj. obszary nieodrzućenia H_0 $[\pi \geq F_{B(n,p)}(0.025)$ oraz $\pi \leq F_{B(n,p)}(0.975)]$.

Dystrybuanty rozkładów $B(250, p)$ oraz przedziały nieodrzućenia H_0																					
n_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$p = 0.01$	0.08	0.29	0.54	0.76	0.89	0.96	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
H_0	■	■	■	■	■																
$p = 0.02$	0.01	0.04	0.12	0.26	0.44	0.62	0.76	0.87	0.93	0.97	0.99	1.0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
H_0		■	■	■	■	■	■	■	■	■	■										
$p = 0.05$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.03	0.06	0.12	0.19	0.29	0.4	0.52	0.63	0.73	0.81	0.88	0.92	0.95	0.97	0.99
H_0							■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

- Przy ustalonym n , szerokości przedziałów rosną wraz z p .
- Dla bliskich sobie p , przedziały dość znacznie się pokrywają.

Test Kupca: pokrycie

Test Kupca (bezwarunkowego pokrycia, ang. unconditional coverage).
Oparty o funkcję wiarygodności dla rozkładu dwumianowego.

- Jeżeli $\eta_t \sim IID B(\alpha)$ to wiarygodność α warunkowo względem n_1 i n_0 :

$$\mathcal{L}(\alpha|n_0, n_1) = \binom{n_0 + n_1}{n_1} \alpha^{n_1} (1 - \alpha)^{n_0}$$

- A zatem hipotezę, że prawdopodobieństwo przekroczenia VaR wynosi p :

$$H_0: P(\eta_t = 1) = p$$

- Można sprawdzić za pomocą testu ilorazu funkcji wiarygodności (likelihood ratio test):

$$LR_{UC} = \frac{\mathcal{L}(p|n_0, n_1)}{\mathcal{L}(\pi|n_0, n_1)} = \frac{p^{n_1} (1 - p)^{n_0}}{\pi^{n_1} (1 - \pi)^{n_0}}$$

- Przy prawdziwości H_0 : $-2\ln(LR_K)$ ma asymptotyczny rozkład $\chi^2(1)$.

Test Christoffersena 1: niezależność

Test Christoffersena 1 (niezależności, ang. independence).

Hipotezą zerową jest że przekroczenie VaR w okresie t nie zależy od przekroczenia VaR w okresie $t - 1$:

$$H_0: P(\eta_t = 1 | \eta_{t-1} = 0) = P(\eta_t = 1 | \eta_{t-1} = 1) [= P(\eta_t = 1)]$$

- Oznaczmy przez n_{ij} liczbę obserwacji dla których $\eta_{t-1} = i$ i $\eta_t = j$:

$$n_{ij} = \#(\eta_{t-1} = i \wedge \eta_t = j)$$

- Oznaczmy przez π_0 i π_1 udziały przekroczeń po braku / wystąpieniu przekroczenia:

$$\pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}} \text{ oraz } \pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}$$

Test Christoffersena 1: niezależność

Test Christoffersena 1 (niezależności, ang. independence).

Hipotezą zerową jest że przekroczenie VaR w okresie t nie zależy od przekroczenia VaR w okresie $t - 1$:

$$H_0: P(\eta_t = 1 | \eta_{t-1} = 0) = P(\eta_t = 1 | \eta_{t-1} = 1) [= P(\eta_t = 1)]$$

- Statystyka testowa:

$$LR_{Ch1} = \frac{\pi^{(n_{01}+n_{11})}(1-\pi)^{(n_{00}+n_{10})}}{\pi_0^{n_{01}}(1-\pi_0)^{n_{00}}\pi_1^{n_{11}}(1-\pi_1)^{n_{10}}} = \frac{\mathcal{L}(\pi|n_{00}, n_{01}) \times \mathcal{L}(\pi|n_{10}, n_{11})}{\mathcal{L}(\pi_0|n_{00}, n_{01}) \times \mathcal{L}(\pi_1|n_{10}, n_{11})}$$

- Przy prawdziwości H_0 : $-2\ln(LR_{Ch1})$ ma asymptotyczny rozkład $\chi^2(1)$.

Test Christoffersena 2: niezależność + pokrycie

Test Christoffersena 2 (warunkowego pokrycia, ang. conditional coverage).

Hipotezą zerową jest że przekroczenie VaR w okresie t nie zależy od przekroczenia VaR w okresie $t - 1$ i jest równe poziomowi tolerancji:

$$H_0: P(\eta_t = 1 | \eta_{t-1} = 0) = P(\eta_t = 1 | \eta_{t-1} = 1) = p$$

UWAGA: Ch2 = Kupiec + Ch1

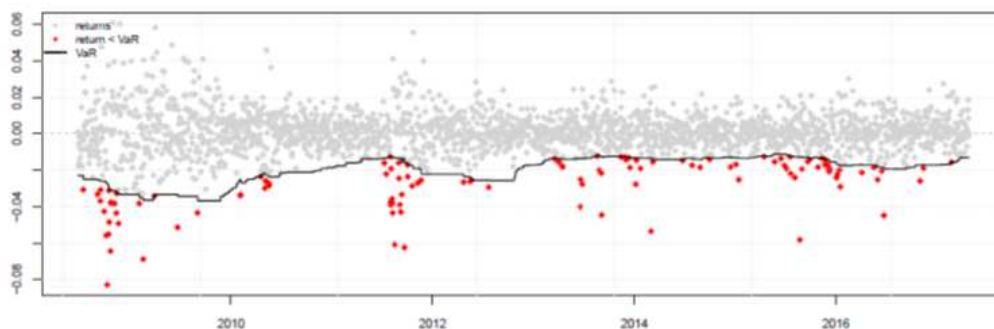
- Statystyka testowa to iloczyn statystyk LR_K i LR_{Ch1}

$$LR_{Ch2} = \frac{p^{(n_{01}+n_{11})}(1-p)^{(n_{00}+n_{10})}}{\pi_0^{n_{01}}(1-\pi_0)^{n_{00}}\pi_1^{n_{11}}(1-\pi_1)^{n_{10}}} = \frac{\mathcal{L}(p|n_{00}, n_{01}) \times \mathcal{L}(p|n_{10}, n_{11})}{\mathcal{L}(\pi_0|n_{00}, n_{01}) \times \mathcal{L}(\pi_1|n_{10}, n_{11})}$$

- Przy prawdziwości H_0 : $-2\ln(LR_{Ch2})$ ma asymptotyczny rozkład $\chi^2(2)$.

Backtesting - ilustracja

- Liczba obserwacji: $n = 2500$
- Oczekiwana liczba przekroczeń: $np = 125$
- Zrealizowana liczba przekroczeń: $n_1 = 124$
- Test Kupca, UC test: H_0
- Test Christofersena, CC test: H_1



Co jest nie tak w modelu VaR?

Podsumowanie

- Backtesting zależy od parametrów: n oraz p
- Pozwala wybrać najlepszą metodę liczenia VaR
- Trzy testy: Kupiec, Christofersen

Metoda	Test		
	Kupca	Christ. 1	Christ. 2
Sym. hist.	✓	✓	✓
r. norm.	✓	✓	✓
r. t-Stud.	✓	✓	✓
EWMA r. norm.	✓	✓	✓
EWMA r. t-Stud.	✓	✓	✓
GARCH r. norm.	✓	✓	✓
GARCH r. t-Stud.	✓	✓	✓

Temat 7. Zadania cd

Zadanie 7.5 Przeprowadź testy oparte na regresji MNK dla VaR wyznaczonej metodą parametryczną zakładającą rozkład normalny stóp zwrotu wybranego funduszu. Przyjmij $T = 1250$, $n = 250$ oraz $p = 0.05$.

Zadanie 7.6 Przeprowadź testy Kupca i Christoffersena dla VaR wyznaczonej metodą parametryczną zakładającą rozkład normalny stóp zwrotu wybranego funduszu. Przyjmij $T = 1250$, $n = 250$ oraz $p = 0.05$. Porównaj wyniki z zadaniem 7.5.

Zadanie 7.7 Jak w Zadaniu 7.6, ale dla:

- $T = 250$, $n = 1250$, $p = 0.05$
- $T = 1250$, $n = 250$, $p = 0.01$

Co się zmieniło?

Zadanie 7.8* Przeprowadź testy Kupca i Christoffersena dla VaR wyznaczonej metodą EWMA/GARCH dla stóp zwrotu wybranego funduszu. Przyjmij $T = 1250$, $n = 250$ oraz $p = 0.05$. Porównaj wyniki z zadaniem 7.6.

Moc backtestu

- Omówione testy pozwalają odrzucić złe modele.
- Niestety, niewiele mówią o poprawności nieodrzuconych modeli.

Pytanie: jak ocenić prawd. nieodrżucenia złego modelu i jak je kontrolować?

Odpowiedź: zadbać o moc testu.

		decyzja	
		H_0	H_1
rzeczywistość	H_0	prob. $1 - \alpha$	błąd I rodzaju (prob. α)
	H_1	błąd II rodzaju (prob. β)	moc testu (prob. $1 - \beta$)

Moc backtestu: metody świateł

- Załóżmy, że metoda M_p idealnie wyznacza VaR z poziomem tolerancji p , czyli jej przekroczenia VaR mają rozkład $IID B(n, p)$.
- Przeprowadzamy backtesting M_p metodą świateł na oknie 250 obs.

		Rozkład $B(250, p)$				
	p	n_1	0 – 4	5 – 9	10 –	moc testu
H_0	0.01	$P(n_1)$	0.892	0.108	0.000	--
H_1	0.02		0.439	0.531	0.030	3%
	0.03		0.128	0.651	0.221	22%
	0.05		0.005	0.190	0.805	81%

- Metoda systematycznie zawyżająca VaR (z poziomem tolerancji $p > 0.01$) ma duże prawdopodobieństwo znalezienia się w strefach zielonej czy żółtej.
- Metoda świateł ma niską moc, jeżeli rzeczywisty poziom tolerancji niewiele się różni od 1%.

Moc testu: rozkład dwumianowy

- Wyznaczamy przedziały nieodrzućcia H_0 dla:
 - $p = 0.01, 0.02, 0.05$
 - $n = 250, 500, 1000, 1500$.
- Zakładamy poziom istotności $\alpha = 0.05$, czyli przedział ufności 95%

p	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 1500$
Przedziały nieodrzućcia H_0 dla liczby przekroczeń n_1				
0.01	[1, 5]	[2, 9]	[5, 16]	[9, 22]
0.02	[2, 9]	[5, 16]	[13, 28]	[21, 40]
0.05	[7, 19]	[17, 34]	[38, 63]	[60, 91]

- Aby rozróżnić metody z prawdopodobieństwem przekroczeń 0.01 i 0.02, długość próby testowej musi być znacznie większa od 250 obserwacji

Analiza testu Kupca

- Asymptotyczny rozkład $-2\ln(LR_K)$ to $\chi^2(1)$.
- Na tej podstawie możemy wyznaczyć przedziały nieodrzućenia H_0 dla różnych poziomów tolerancji i rozmiarów próby testowej (zakładamy poziom istotności $\alpha = 0.05$).

p (%)	$n = 250$	$n = 500$	$n = 1000$	$n = 1500$
Przedziały nieodrzućenia H_0 dla liczby przekroczeń n_1				
1	[1,6]	[2, 9]	[5, 16]	[9, 23]
2	[2, 9]	[5, 16]	[12, 29]	[21, 41]
5	[7, 19]	[17, 35]	[38, 64]	[60, 92]
Moc testu dla $H_0: P(r \leq VaR)=0.01$				
2	0.243	0.544	0.782	0.888
5	0.969	1.000	1.000	1.000

- Przedziały są szerokie dla $n = 250$ i zmniejszają się wraz ze wzrostem n .
- Dla małych n , przedziały zachodzą na siebie w znacznym stopniu.

**Backtesting ES:
testy McNeila i Freya oraz Berkowitza**

Test McNeila i Freya dla ES

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- τ : momenty przekroczeń VaR, tj. $\tau: r_\tau < \text{VaR}_\tau$,
- n_1 : liczba przekroczeń
- u_τ : odległość od ES_τ , tj. $u_\tau = ES_\tau - r_\tau$
- \bar{u} : średnia wartość u_τ
- S_u : odchylenie standardowe u_τ

- Hipotezą zerową testu MF jest:

$$H_0: E(u_\tau) = 0$$

- Przy prawdziwości H_0 statystyka:

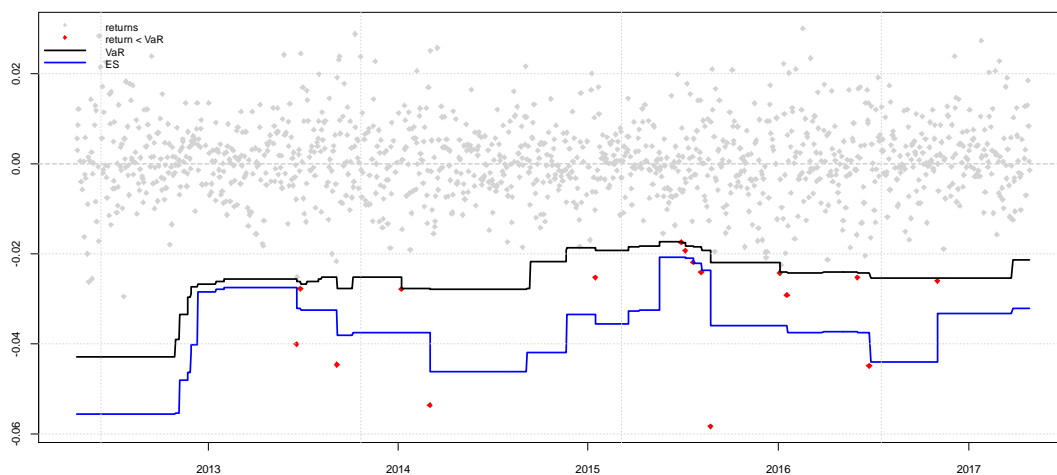
$$MF = \frac{\bar{u}}{S_u/\sqrt{n_1}}$$

- Statystyka MF ma asymptotyczny rozkład $N(0,1)$
Przy niskich n_1 rozkład przybliżany przy użyciu *bootstrapu*.

Symulacja historyczna

- Backtesting 1% VaR i ES na 1250 obs.
- Okna estymacji 300 obs.
- 16 przekroczeń (oczekiwane 12.5).
- p-value dla testu Kupca: 0.34
- p-value dla testu Christ. 2: 0.25
- p-value dla testu MF: 0.42

Symulacja historyczna, okna estymacji 300 obs.



Backtesting VaR i ES: podsumowanie

Metoda	Test			
	r. dwum.	Kupca	Christ. 2	M-F
Sym. hist.	✓	✓	✓	✓
MA r. norm	✗	✗	✗	✗
MA r. t-Stud.	✓	✓	✗	✓
EWMA r. norm.	✗	✗	✗	✗
EWMA r. t-Stud.	✓	✓	✓	✓
GARCH r. norm.	✗	✗	✗	✗
GARCH r. t-Stud.	✓	✓	✓	✓

Dodatek: Backtesting dla całego rozkładu: test Berkowitza (2001)

- Omówione metody dostarczają prognoz dla rozkładów zwrotów:

$$\text{pdf: } f_{T+1|T}(r) \text{ oraz cdf: } F_{T+1|T}(r)$$

- Znając realizację stopy r_{T+1} możemy policzyć PIT (probability integral transform, Rosenblatt '52):

$$PIT_{T+1|T} = \int_{-\infty}^{r_{T+1}} f_{T+1|T}(r) dr = F_{T+1|T}(r_{T+1})$$

- Jeżeli stosujemy dobrze skalibrowany model, czyli dobrze wyznacza VaR_p dla każdego poziomu tolerancji p , to:

$$PIT_{T+1|T} \sim U(0,1)$$

Dodatek: Backtesting dla całego rozkładu: test Berkowitza (2001)

Jeżeli:

$$PIT_{T+1|T} \sim U(0,1)$$

to:

$$z_{T+1|T} = \Phi^{-1}(PIT_{T+1|T}) \sim IID N(0,1),$$

Test Berkowitza. Dla modelu:

$$z_{t+1|t} = \alpha + \rho z_{t|t-1} + \varepsilon_{t+1}$$

weryfikujemy:

$$H_0: \alpha = 0 \wedge \rho = 0$$

Temat 7. Zadania

Zadanie 7.9. Przeprowadź test McNeila i Freya dla szeregu czasowego notowań swojego funduszu ES wyznaczonego metodami symulacji historycznej, metodą parametryczną, EWMA i GARCH dla okna testowego 250 obs. Przyjmij poziom tolerancji $p = 1\%$ oraz $p = 5\%$. Porównaj otrzymane wyniki z wynikami dla WIG.

Zadanie 7.10. Jak zmieniają się wyniki jeżeli okno estymacji wynosi 250 obs., zaś okno testowe to 1000 obs.

Zadanie 7.11. Przeprowadź test Berkowitza dla ustawień z zdania 7.9.

Prezentacja analiz z Tematów 5-7

Przygotuj prezentację na 5-6 minut, zawierającą następujące informacje:

- a. <0p> Przypomnij główne informacje na temat funduszu z Prezentacji 1.
- b. <1.5p> Wartości 5% VaR dla horyzontu od 1 do 4 dni roboczych uzyskanych za pomocą:
- metody root square of time (rozkład normalny)
 - rozszerzenia Cornisha-Fishera
 - symulacji MC z modelu GARCH

Przedstaw wyniki w formie tabeli oraz wykresu.

- c. <2p> Dokonaj analizy ryzyka inwestycji w horyzoncie roku. Oblicz oraz porównaj VaR oraz S-VaR (dla skrajnych wartości wariancji obliczonych jako 99 percentyl z 21-dniowego okna) dla poziomu tolerancji 5% oraz założenia o rozkładzie normalnym. Przedstaw histogram wariancji wraz ze skrajną wartością zaburzoną.

- d. <2.5p> Zmianę ceny portfela w scenariuszu I etapu pandemii COVID-19:

- spadek cen surowców o 50%, ale wzrost cen metali szlachetnych o 25%
- spadku cen akcji na rynkach rozwiniętych o 10%, zaś na rynkach rozwijających się o 15% (Uwaga: PL klasyfikujemy jako kraj rozwijający)
- odpływie kapitału z rynków wschodzących i deprecjacji ich kursów o 10%
- przesunięciu krzywej dochodowości na całej długości o 1 pkt. proc. w dół

Przedstaw zakładaną strukturę portfela, analizę wrażliwości oraz wpływ na wycenę portfela. Porównaj wyniki obliczeń ze zmianą wyceny jednostki portfela w okresie 1.03-31.05.2020.

- e. <3p> Przeprowadź backtesting 1% VaR na oknie testowym ostatnich 250 obserwacji (metoda świateł, testy Kupca, Christoffersena, McNeil-Frey) dla następujących metod:

- symulacja historyczna lub rozkład parametryczny
- Cornish-Fisher
- EWMA lub GARCH

Podaj wartości krytyczne oraz statystyki testowe wraz z odpowiednimi wykresami VaR, zwrotów i przekroczeń. Wskaż najlepszy model.

Dodatkowo, można zdobyć <1p> za jakość prezentacji i wystąpienia oraz ogólną dyskusję na temat ryzyka inwestycji w analizowany fundusz. Proszę unikać dużej liczby slajdów. Prezentację w pliku pdf o nazwie *ImieNazwisko.pdf* proszę przekazać prowadzącemu zajęcia.