Rozdział 9: Wycena opcji

MODELOWANIE POLSKIEJ GOSPODARKI z R

Definicja opcji

Opcja finansowa:

Warunkowy kontrakt terminowy na sprzedaż lub kupno instrumentu bazowego, który jest zawarty między wystawcą i nabywcą opcji. Posiadacz opcji ma prawo (nie obowiązek) nabycia instrumentu bazowego po określonej cenie w określonym terminie.

Aby opisać opcję należy określić:

- instrument bazowy (waluty, akcje, indeksy giełdowe)
- rodzaj opcji (opcja kupna, opcja sprzedaży)
- typ opcji (opcja europejska, opcja amerykańska)
- cenę wykonania (strike price)
- moment wygaśnięcia opcji (expiration date)

Opcje na WIG20

Oznaczenia opcji na WIG20 notowanych na GPW:

OW20ABCCC

gdzie kolejne fragmenty nazwy oznaczają:

- **O:** dany instrument jest opcją;
- **W20:** instrumentem bazowym jest indeks WIG20;
- **A:** miesiąc terminu wykonania oraz rodzaj opcji. Litery „C", „F", „I" oraz „L" oznaczają opcje kupna o terminach wygaśnięcia w trzeci piątek marca, czerwca, września i grudnia, zaś litery „O", „R", „U" i „X" opisują odpowiednie opcje sprzedaży;
- **B:** ostatnia cyfra roku terminu wykonania opcji;
- **CCC:** cena wykonania opcji (podzielona przez 10).

Terminologia

O opcji kupna o cenie wykonania K i bieżącej cenie instrumentu bazowego P mówimy, że:

- „jest w cenie" (in-the-money) jeżeli $P > K$;
- „jest po cenie" (at-the-money) jeżeli $P = K$;
- „nie jest w cenie" (out-of-the-money), jeżeli $P < K$.

Dla opcji sprzedaży, nazewnictwo jest odwrotne.

Proces stochastyczny w czasie ciągłym

Proces stochastyczny $\{Y_t\}$ w czasie ciągłym

Ciąg zmiennych losowych Y_t, gdzie indeks czasu t należy do zbioru liczb rzeczywistych o wartościach nieujemnych.

Proces Wienera

Proces $\{w_t\}$ jest procesem Wienera (ruchy Browna) jeżeli:

1. przyrost $w_t - w_s$ jest niezależny od w_u dla dowolnych $u \leq s \leq t$
2. $\forall_{s \leq t} w_t - w_s \sim N(0, t - s)$;
3. trajektorie procesu $\{w_t\}$ są ciągłe w czasie.

Rozkład procesu Wienera oraz jego przyrostów $dw_t = w_{t+dt} - w_t$:

$$w_t \sim N(w_0, t)$$
$$dw_t \sim N(0, dt)$$

Uogólniony proces Wienera

Dla zmiennych z dryfem i wariancją proporcjonalną do upływu czasu stosowany jest uogólniony proces Wienera $\{x_t\}$ postaci:

$$dx_t = \mu dt + \sigma dw_t,$$

gdzie μ określa dryf, zaś σ odchylenie standardowe procesu x_t.

Rozkład uogólnionego procesu Wienera oraz jego przyrostów:

$$x_t \sim N(x_0 + \mu t, \sigma^2 t)$$
$$dx_t \sim N(\mu dt, \sigma^2 dt)$$

Proces Ito

Jeżeli dryf oraz zmienność procesu są zmienne w czasie to mówimy o procesie Ito, którego przyrosty są dane przez:

$$dx_t = \mu(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)dw_t$$

Wartość Procesu Ito jako:

$$x_t = x_0 + \int_0^t \mu(x_s, s)ds + \int_0^t \sigma(x_s, s)dw_s$$

Geometryczny proces Wienera

Przykładem procesu Ito jest geometryczny proces Wienera dla którego:

$$\mu(x_t, t) = \mu x_t$$
$$\sigma(x_t, t) = \sigma x_t$$

Dynamika geometrycznego procesu Wienera:

$$dx_t = \mu x_t dt + \sigma x_t dw_t.$$

Lemat Ito

Niech x_t będzie procesem Ito postaci:

$$dx_t = \mu(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)dw_t,$$

zaś y_t procesem stochastycznym:

$$y_t = f(x_t, t),$$

gdzie f jest różniczkowalną funkcją względem x_t oraz t.

Dynamika y_t jest dana przez:

$$dy_t = \left[\frac{\partial f(x_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x_t, t)}{\partial x_t}\mu(x_t, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_t, t)}{\partial x_t^2}\sigma^2(x_t, t)\right] dt + \frac{\partial f(x_t, t)}{\partial x_t}\sigma(x_t, t)dw_t,$$

gdzie w_t jest procesem Wienera.

Lemat Ito - przykład

Jak przykład zastosowania lematu Ito rozważmy przypadek, gdy x_t jest geometrycznym procesem Wienera oraz $y_t = f(x_t, t) = \ln x_t$, tj:

$$\mu(x_t, t) = \mu x_t, \quad \sigma(x_t, t) = \sigma x_t, \quad \frac{\partial f(x_t, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f(x_t, t)}{\partial x_t} = \frac{1}{x_t}, \quad \frac{\partial^2 f(x_t, t)}{\partial x_t^2} = -\frac{1}{2x_t^2}.$$

Podstawiając do wzoru:

$$dy_t = \left[\frac{\partial f(x_t, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x_t, t)}{\partial x_t}\mu(x_t, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_t, t)}{\partial x_t^2}\sigma^2(x_t, t)\right] dt + \frac{\partial f(x_t, t)}{\partial x_t}\sigma(x_t, t) dw_t,$$

Uzyskujemy:

$$dy_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dw_t.$$

y_t jest uogólnionym procesem Wienera o dryfie $\mu - \sigma^2/2$ oraz wariancji σ^2

Formuła Blacka-Scholesa - założenia

- cena instrumentu bazowego P_t jest geometrycznym procesem Wienera
- nie występują koszty transakcji oraz nie ma podatków
- rynek jest doskonale płynny, zaś wszystkie instrumenty są doskonale podzielne
- wszyscy uczestnicy rynku mogą pożyczać i inwestować środki według tej samej procentowej r

Formuła Blacka-Scholesa - wyprowadzenie

- Cena opcji: $Y_t = Y(P_t, t)$
- Stwórzmy portfel składający się z krótkiej pozycji na jedną opcję oraz $\frac{\partial Y_t}{\partial P_t}$ sztuk instrumentu bazowego o wartości:

$$V_t = -Y_t + \frac{\partial Y_t}{\partial P_t} P_t$$
$$dV_t = -dY_t + \frac{\partial Y_t}{\partial P_t} dP_t$$

- Ponieważ (zgodnie z Lematem Ito):

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dw_t$$
$$dY_t = \left[\frac{\partial Y_t}{\partial t} + \frac{\partial Y_t}{\partial P_t}\mu P_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial P_t^2}\sigma^2 P_t^2\right] dt + \frac{\partial Y_t}{\partial P_t}\sigma P_t dw_t.$$

dynamika portfela jest deterministyczna:

$$dV_t = -\left[\frac{\partial Y_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial P_t^2}\sigma^2 P_t^2\right] dt.$$

Formuła Blacka-Scholesa - wyprowadzenie

- Ponieważ stopa zwrotu z portfela V_t jest deterministyczna to zgodnie z warunkiem arbitrażu powinna ona być równa stopie wolnej od ryzyka r, czyli:

$$dV_t = rV_t dt.$$

- Połączenie zależności prowadzi do uzyskania równania różniczkowego Blacka-Scholesa:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial t} + rP_t \frac{\partial Y_t}{\partial P_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_t}{\partial P_t^2} \sigma^2 P_t^2 = rY_t.$$

- Formuła BS dla opcji europejskiej stanowi rozwiązanie powyższego równania różniczkowego przy warunku, że w momencie wygaśnięcia T, wartość opcji wynosi:

$$Y_T = \begin{cases} \max(Y_T - K, 0) & \text{dla opcji kupna} \\ \max(K - Y_T, 0) & \text{dla opcji sprzedaży,} \end{cases}$$

Formuła Blacka-Scholesa

Wzór na cenę opcji:

$$Y_t = \begin{cases} P_t \Phi(d_1) - e^{-r(T-t)} K \Phi(d_2) & \text{dla opcji kupna} \\ -P_t \Phi(-d_1) + e^{-r(T-t)} K \Phi(-d_2) & \text{dla opcji sprzedaży,} \end{cases}$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego, zaś wartości d_1 oraz d_2 wynoszą:

$$d_1 = \frac{\ln(P_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

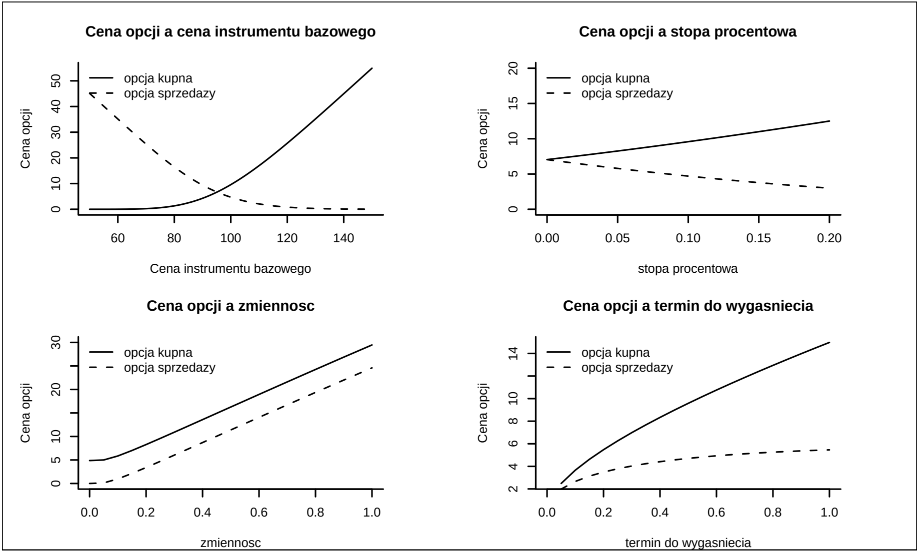
$$d_2 = \frac{\ln(P_t/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Formuła Blacka-Scholesa - przykład

```
> P <- 100; sig <- 0.25; r <- 0.10; K <- 100; tau <- 0.5
> OptP <- function(type,P,K,r,sig,tau){
   d1 <- (log(P/K) + (r+sig^2/2)*tau)/(sig*sqrt(tau))
  d2 <- (log(P/K) + (r-sig^2/2)*tau)/(sig*sqrt(tau))
  if(type == "call"){ return(P*pnorm(d1) - K*exp(-r*tau)*pnorm(d2))}
  if(type == "put") {return(K*exp(-r*tau)*pnorm(-d2) - P*pnorm(-d1))}
 }
> OptP("call",P,K,r,sig,tau)
> OptP("put",P,K,r,sig,tau)

Wartosc opcji kupna:     9.58
Wartosc opcji sprzedazy: 4.71
```

Greckie wskaźniki w wycenie opcji



Greckie wskaźniki w wycenie opcji

- Cena instrumentu bazowego (delta), $\Delta = \frac{\partial Y_t}{\partial P_t}$:

$$\Delta_{call} = \Phi(d_1) \text{ oraz } \Delta_{put} = \Phi(d_1) - 1$$

  Zauważmy, że $\Delta_{call} \in (0,1)$, $\Delta_{put} \in (-1,0)$ oraz $\Delta_{call} - \Delta_{put} = 1$

- Druga pochodna (gamma), $\Gamma = \frac{\partial Y_t}{\partial \Delta} = \frac{\partial^2 Y_t}{\partial P_t^2}$:

$$\Gamma_{call} = \Gamma_{put} = \frac{\phi(d_1)}{P_t \sigma \sqrt{T-t}}$$

  gdzie $\phi(x) = \Phi'(x)$ jest funkcją gęstości rozkładu normalnego.

- Zmienność (vega), $\nu = \frac{\partial Y_t}{\partial \sigma}$:

$$\nu = P_t \phi(d_1) \sqrt{T-t}$$

- Stopa wolna od ryzyka (rho),$\rho = \frac{\partial Y_t}{\partial r}$:

$$\rho_{call} = (T-t)Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \text{ oraz } \rho_{put} = -(T-t)Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)$$

- Moment obserwacji (theta) - $\theta = \frac{\partial Y_t}{\partial t}$:

$$\theta_{call} = -\frac{P_t \phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \text{ oraz } \theta_{put} = -\frac{P_t \phi(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)$$

Greckie wskaźniki w wycenie opcji

```
> library(RQuantLib)
> EuropeanOption("call", P, K, 0, r, tau, sig)
> EuropeanOption("put", P, K, 0, r, tau, sig)

Wspolczynniki greckie dla opcji kupna
   value    delta    gamma     vega    theta      rho
  9.5822   0.6448   0.0211  26.3311 -12.0722  27.4472

Wspolczynniki greckie dla opcji sprzedazy
   value    delta    gamma     vega    theta      rho
  4.7052  -0.3552   0.0211  26.3311  -2.5599 -20.1142
```

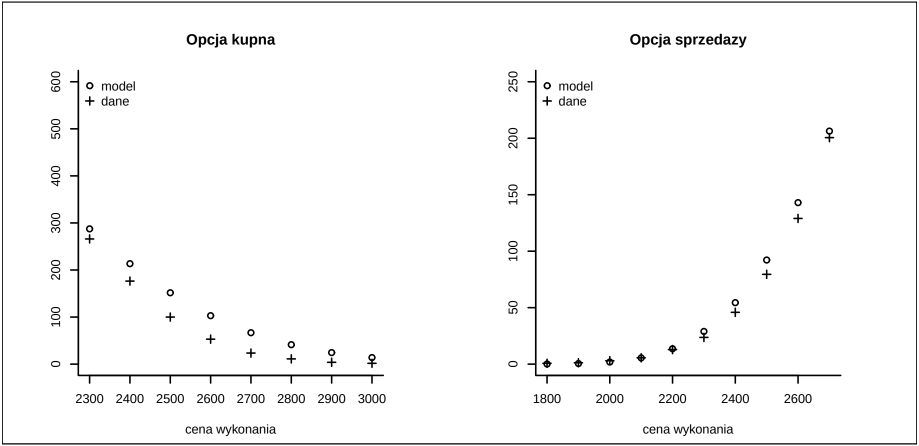
Przykład - wycena opcji na WIG20

Przykład dotyczy wyceny opcji na podstawie danych do 30 kwietnia 2010 r. na WIG20 o terminie wygaśnięcia 18 czerwca 2010 r..

```
Porownanie teoretycznych i rzeczywistych cen opcji

Opcje kupna                             Opcje sprzedazy
                K model    dane         K    model    dane
OW20F0230 2300 287.5 266.00             OW20R0180 1800   0.113   0.75
OW20F0240 2400 213.4 176.45             OW20R0190 1900   0.519   1.20
OW20F0250 2500 151.6 100.00             OW20R0200 2000   1.872   3.00
OW20F0260 2600 102.9  53.05             OW20R0210 2100   5.500   5.58
OW20F0270 2700  66.7  23.50             OW20R0220 2200  13.581  12.88
OW20F0280 2800  41.4  11.16             OW20R0230 2300  28.937  23.66
OW20F0290 2900  24.5   3.84             OW20R0240 2400  54.423  45.85
OW20F0300 3000  13.9   1.76             OW20R0250 2500  92.165  79.50
                                        OW20R0260 2600 142.990 129.00
                                        OW20R0270 2700 206.311 200.55
```

Przykład - wycena opcji na WIG20



Zmienność implikowana

- Spośród parametrów występujących w formule Blacka-Scholesa w momencie t znane są wartości ceny instrumentu bazowego P_t, ceny wykonania opcji K, stopy wolnej od ryzyka r oraz terminu wygaśnięcia $T - t$.
- Wartość dla parametru opisującego zmienności instrumentu bazowego σ nie jest znana
- Cena opcji jest funkcją prognozy zmienności:

$$Y = Y(\sigma | P, K, r, \tau)$$

- Odwracając zależność obliczymy wartość zmienności implikowanej (implied volatility):

$$\sigma = Y^{-1}(Y | P, K, r, \tau)$$

Zmienność implikowana - przykład