Rozdział 8. Modele Krzywej Dochodowości

MODELOWANIE POLSKIEJ GOSPODARKI z R

Definicja krzywej dochodowości

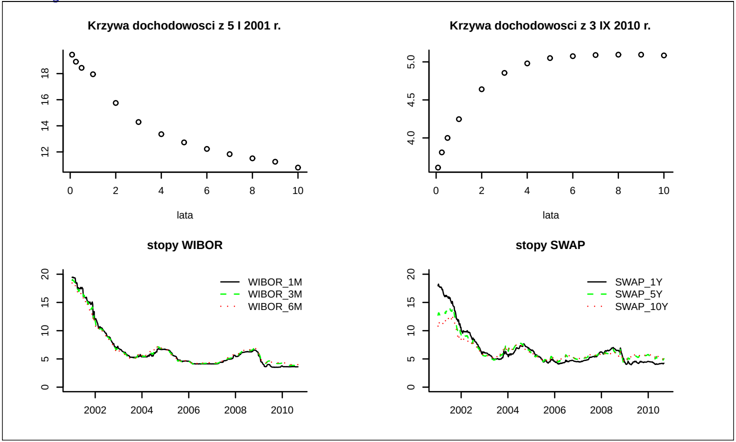
Krzywa dochodowości (yield curve):
Ilustracja graficzna struktury terminowej stóp procentowych. Opisuje zależność między wysokością oprocentowania dłużnych instrumentów finansowych R_τ a terminem ich zapadalności τ.

Analizy krzywej dochodowości umożliwia wyznaczenie oczekiwań rynku co do przyszłego poziomu stóp procentowych. Jest to informacja pomocna w:

- Polityce monetarnej
- Zarządzaniu długiem publicznym
- Zrządzaniu finansami przedsiębiorstwa
- Zarządzaniu finansami gospodarstw domowych

Ponadto, kształt krzywej dochodowości okazuje się być dobrym wskaźnikiem wyprzedzającym przyszłej sytuacji makroekonomicznej

Krzywa dochodowości w Polsce



Spotkane kształty krzywej dochodowości:

- normalny
- odwrócony (inverted)
- zgarbiony (hump-shaped)
- litery S (S-shaped)

Teorie krzywej dochodowości

1. Teoria oczekiwań:
   Kształt krzywej dochodowości jest determinowany przez oczekiwania dotyczące przyszłego poziomu stóp procentowych
2. Teoria płynności:
   Inwestorzy wymagają premii za trzymanie w portfelu inwestycyjnym instrumentów dłużnych o długim terminie zapadalności ze względu na niższą płynność tych instrumentów
3. Teoria segmentacji rynku:
   Kształt krzywej dochodowości jest determinowany przez relatywną podaż oraz rynkowy popyt obligacji o danym terminie zapadalności.

Modele krzywej dochodowości

- Dostępne dane pozwalają uzyskać wartości krzywej dochodowości jedynie dla wybranych wartości parametru τ: $\{R_{\tau_i} : i = 1, 2, \ldots, N\}$
- W praktyce potrzebne są wartości R_τ dla dowolnej wartości τ
- Wykorzystuje się modele parametryczne postaci:

$$R_\tau = f(\beta, \tau),$$

  gdzie wartości parametru β szacuje się na podstawie danych $\{R_{\tau_i} : i = 1, 2, \ldots, N\}$

UWAGA: Powyższe rozważania są dla danego okresu t, tak, że stopa procentowa o terminie zapadalności τ wynosi $R_{t,\tau}$.

Stopa terminowa

Warunek braku arbitrażu wskazuje, że wartość kontraktu terminowego na stopę procentową wynosi:

$$F_{\tau_1,\tau_2} = \frac{\tau_2 R_{\tau_2} - \tau_1 R_{\tau_1}}{\tau_2 - \tau_1},$$

gdzie:

R_τ: stopa kasowa o ciągłej kapitalizacji

F_{τ_1,τ_2}: stopę terminowa rozpoczynająca się w okresie τ_1 i wygasającą w okresie τ_2

Przykład:
Dla $R_5 = 0.06$ i $R_3 = 0.05$ wartość stopy terminowej rozpoczynającej się za 3 lata i terminie wygaśnięcia za 5 lat jest równa:

$$F_{3,5} = \frac{5 \times 0.06 - 3 \times 0.05}{5 - 3} = 0.075$$

Chwilowa stopa terminowa

Definicja chwilowej stopy terminowej (instantenous forward rate):

$$F_\tau = \lim_{s \to \tau^+} F_{\tau,s}$$

Ponieważ F_τ stanowi krańcowy koszt pozyskania kapitału w okresie τ, zaś R_τ oraz F_{τ_1,τ_2} opisują przeciętny koszt pozyskania kapitału to:

$$R_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F_s ds$$

$$F_{\tau_1,\tau_2} = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_s ds$$

Model Nelsona-Siegela

Nelson i Siegel (1987) wskazują, że idealna postaci funkcji $R_\tau = f(\beta, \tau)$ powinna spełniać kryteria:

1. Funkcja f powinna być w stanie odzwierciedlić występujące w praktyce kształty krzywej dochodowości.
2. Wartości funkcji f powinny być dodatnie i ograniczone od góry.
3. Funkcja f powinna mieć granicę w nieskończoności: $\lim_{\tau\to\infty} f(\beta, \tau) = \kappa$, gdzie κ jest pewną stałą.
4. Liczba parametrów wchodzących w skład wektora β powinna być jak najmniejsza.

Model Nelsona-Siegela

Nelson i Siegel proponują model dla chwilowej stopy terminowej postaci:

$$F_\tau = \beta_0 + \beta_1 \exp(-\tau/\lambda) + \beta_2(\tau/\lambda)\exp(-\tau/\lambda)$$

dla którego wartość stopy kasowej wynosi (tj. całka powyższego wyrażenia):

$$R_\tau = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)\frac{1 - \exp(-\tau/\lambda)}{\tau/\lambda} - \beta_2 \exp(-\tau/\lambda).$$

Interpretacja parametrów:

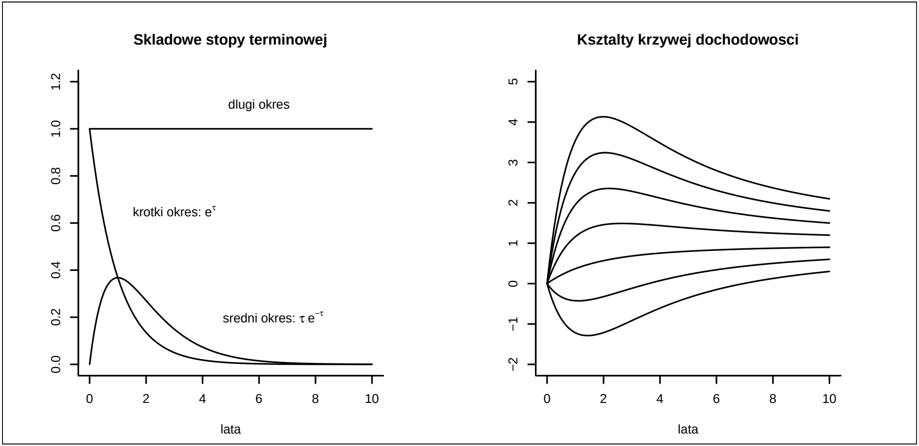
$\beta_0 = \lim_{\tau\to\infty} R_\tau$: długookresowy poziom stopy procentowej

$\beta_0 + \beta_1 = \lim_{\tau\to 0} R_\tau$: krótkookresowy poziom stopy procentowej

β_2: czynnik średniookresowy odpowiadający za kształt krzywej dochodowości

τ: parametr skalujący, tj.: $f(\beta, a\lambda, a\tau) = f(\beta, \lambda, \tau)$

Model Nelsona-Siegela



Prawy panel przedstawia postać krzywej dochodowości dla $\beta_0 + \beta_1 = 0$, $\beta_0 = 1$, $\tau = 1$ oraz różnych wartości β_2 z przedziału $[-6, 12]$

Model Svenssona

- Svensson (1994) zaproponował rozszerzenie modelu Nelsona-Siegela poprzez dodanie kolejnego składnika opisującego średniookresową zmienność stopy terminowej.
- Specyfikacja modelu dla chwilowej stopy terminowej:

$$F_\tau = \beta_0 + \beta_1 \exp(-\tau/\lambda_1) + \beta_2(\tau/\lambda_1)\exp(-\tau/\lambda_1) + \beta_3(\tau/\lambda_2)\exp(-\tau/\lambda_2).$$

- Specyfikacja modelu dla stopy kasowej:

$$R_\tau = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1-\exp(-\tau/\lambda_1)}{\tau/\lambda_1}\right) + \beta_2 \left(\frac{1-\exp(-\tau/\lambda_1)}{\tau/\lambda_1} - \exp(-\tau/\lambda_1)\right) + \\ + \beta_3 \left(\frac{1-\exp(-\tau/\lambda_2)}{\tau/\lambda_2} - \exp(-\tau/\lambda_2)\right).$$

- Tak jak w modelu NS wartości graniczne wynoszą $\lim_{\tau\to\infty} R_\tau = \beta_0$ oraz $\lim_{\tau\to 0} R_\tau = \beta_0 + \beta_1$

Zastosowanie dla analizy stóp proc. w Polsce

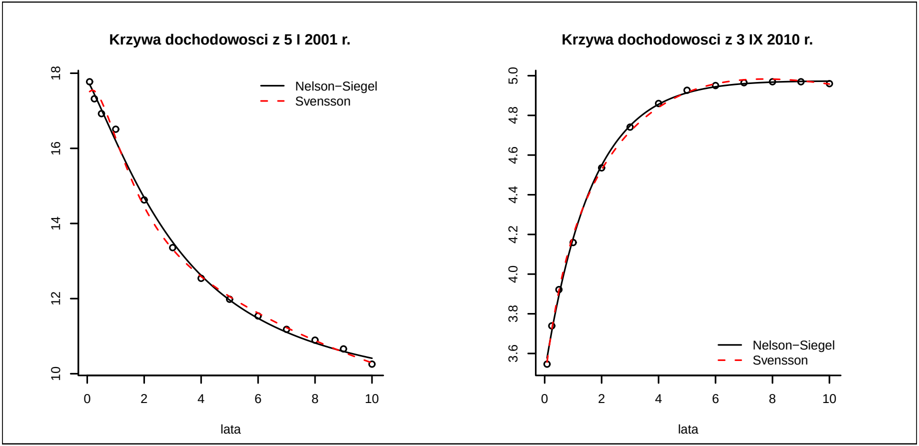
Oszacowanie modelu Nelsona-Siegela

	beta_0	beta_1	beta_2	lambda
Krzywa z 5.I.2001	8.76	9.07	5.74	0.075
Krzywa z 3.IX.2010	4.96	-1.46	1.56	0.050

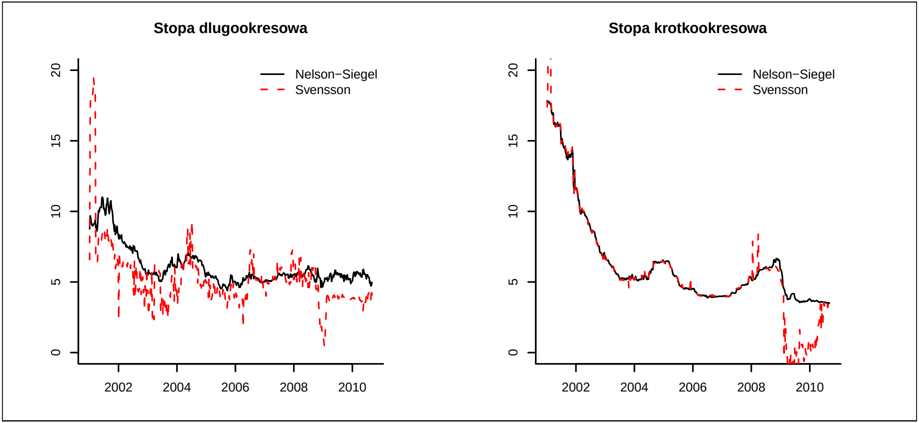
Oszacowanie modelu Svenssona

	beta_0	beta_1	beta_2	beta_3	tau1	tau2
Krzywa z 5.I.2001	6.59	10.8	10.7	10.3	6.69	33.5
Krzywa z 3.IX.2010	4.08	-0.62	0.29	3.11	6.69	50.2

Zastosowanie dla analizy stóp proc. w Polsce



Zastosowanie dla analizy stóp proc. w Polsce



Kontrakt FRA

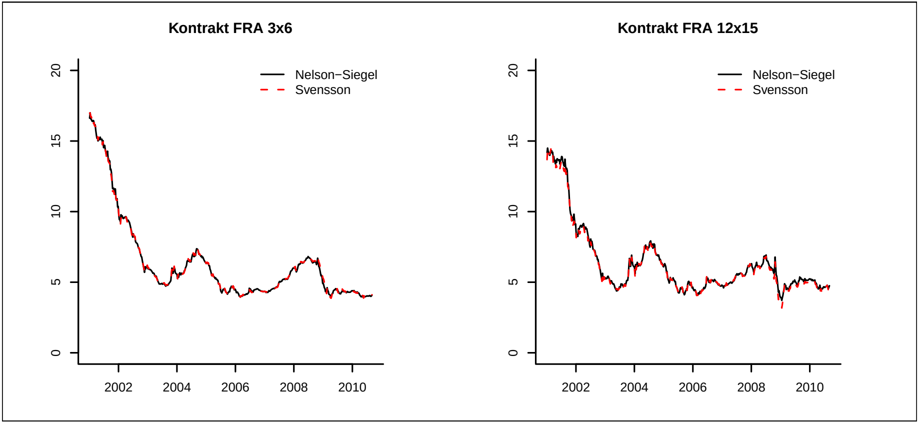
Kontrakt terminowy na stopę procentową (forward rate agreement, FRA):
Umowę zawarta w okresie t, w ramach której strony ustalają wysokość stopy procentowej obowiązującej między okresami $t+\tau_1$ i $t+\tau_2$, gdzie $\tau_2 > \tau_1 > 0$. Momenty t, $t+\tau_1$ oraz $t+\tau_2$ określają odpowiednio daty zawarcia transakcji, rozpoczęcia okresu odsetkowego oraz zakończenia okresu odsetkowego.

Przykład:
Na rynku polskim kontrakt FRA 3x6 określa umowę na poziom WIBOR 3M o momencie rozpoczęcia okresu odsetkowego za 3 miesiące od momentu zawarcia transakcji.

Oprocentowanie kontraktu FRA (warunek arbitrażu):

$$F_{t,\tau_1,\tau_2} = \frac{\tau_2 R_{t,\tau_2} - \tau_1 R_{t,\tau_1}}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Kontrakty FRA obliczone na podstawie modeli NS i Svenssona



Przyszła ścieżka stóp procentowych

- Teoria racjonalnych oczekiwań wskazuje, że oprocentowanie kontraktów FRA odzwierciedla oczekiwania uczestników rynku co do przyszłego poziomu stopy procentowej:
$$E_t(R_{t+\tau_1,\tau_2-\tau_1}) = F_{t,\tau_1,\tau_2},$$
- Krzywa dochodowości może być wykorzystana do wyznaczenia prognozy dla przyszłych wartości stopy procentowej (zgodnie z powyższym wzorem)
- UWAGA: teoria płynności wskazuje na występowanie premii za ryzyko terminowe, co implikuje, że:

$$F_{t,\tau_1,\tau_2} > E_t(R_{t+\tau_1,\tau_2-\tau_1}).$$

Oczekiwany poziom stóp procentowych na podstawie krzywej dochodowości z dnia 3 X 2009 r.