Rozdział 7. Modele klasy ARCH

MODELOWANIE POLSKIEJ GOSPODARKI z R

Modele klasy ARCH

Charakterystyki większości szeregów finansowych:

- Grupowanie wariancji (volatility clustering): występowanie okresów o nasilonej zmienności
- Leptokurtyczny rozkład stóp zwrotu (grube ogony): prawdopodobieństwo wystąpienia obserwacji bliskich oraz znacznie oddalonych od średniej wartości są istotnie wyższe niż dla rozkładu normalnego

Zjawiska te można uwzględnić stosując modele klasy ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) wprowadzonych do literatury przez Engle'a w 1982 r.

Grupowanie wariancji

W modelu:

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t, \ \epsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

występuje grupowanie wariancji jeżeli $Cov(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-k}^2) \neq 0$ dla $k \neq 0$.

Testowanie zjawiska grupowania wariancji:

1. Analiza ACF + test Ljunga-Boxa dla kwadratów reszt modelu e_t^2.
2. Test ARCH-LM (Engle, 1982). Dla regresji:

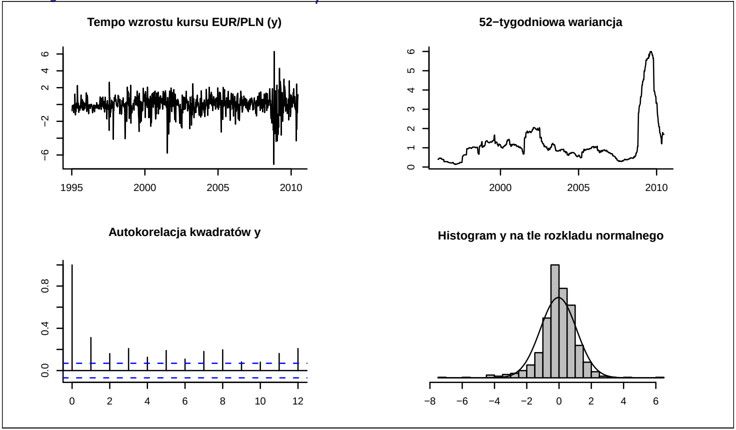
   $$e_t^2 = \beta_0 + \beta_1 e_{t-1}^2 + \ldots + \beta_p e_{t-p}^2 + \nu_t.$$

   weryfikowany jest zespół hipotez:

   $$H_0 : \forall_{1 \leq i \leq p} \beta_i = 0$$
   $$H_1 : \exists_{1 \leq i \leq p} \beta_i \neq 0$$

   Przy prawdziwości H_0 statystyka $LM = (T - p)R^2$ ma rozkład $\chi^2(p)$.

Przykład - kurs EUR/PLN




```
Box-Ljung test dla y^2 (grupowanie wariancji)
BL = 314.0, df = 12, p-value < 2.2e-16

Jarque Bera Test dla y (leptokurtoza)
JB = 992.2, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

Model ARCH

Specyfikacja modelu ARCH(P) - Engle (1982):

$$
\begin{aligned}
y_t =& \mu_t + \epsilon_t, \ \epsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2) \\
\sigma_t^2 =& \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_P \epsilon_{t-P}^2,
\end{aligned}
$$

gdzie $\omega > 0$ oraz $\alpha_p \geq 0$ dla $p \in \{1, 2, \ldots, P\}$ (aby $\sigma_t^2 \geq 0$)

Idea modelu ARCH(P):
Jeżeli e_t^2 jest relatywnie wysokie to w kolejnych okresach (dla $p \in \{1, 2, \ldots, P\}$) wahliwość y_t mierzona σ_{t+p}^2, jest także podwyższona.

Dla $p > P$, wpływ e_t^2 na σ_{t+p}^2 jest zerowy. Biorąc pod uwagę trwałość wpływu szoków na zmienność wielu szeregów finansowych oznacza to konieczność przyjęcia wysokich wartości P w modelu ARCH(P).

Model GARCH

- Problem konieczności wyboru wysokiej wartości P w modelu ARCH(P) można rozwiązać, poprzez uwzględnienie opóźnionych wartości wariancji warunkowej w równaniu dla σ_t^2.
- Rozwiązanie to zostało zaproponowane przez Bollersleva (1986) w postaci modelu GARCH (Generalized ARCH) o specyfikacji:

$$\begin{aligned} y_t =& \mu_t + \epsilon_t, \; \epsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 =& \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_P \epsilon_{t-P}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \ldots + \beta_Q \sigma_{t-Q}^2, \end{aligned}$$

gdzie $\omega > 0$, $\alpha_p \geq 0$ oraz $\beta_q \geq 0$.

Bezwarunkowa wariancja w modelu GARCH(1,1)

Zapiszmy kwadraty reszt model GARCH(1,1) jako:

$$\epsilon_t^2 = \sigma_t^2 + \eta_t, \;\; E(\eta_t) = 0$$

zaś równanie wariancji jako model ARMA(1,1):

$$\epsilon_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\epsilon_{t-1}^2 + \eta_t - \beta\eta_{t-1},$$

lub:

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\sigma_{t-1}^2 + \alpha\eta_{t-1}.$$

Model wariancji warunkowej jest stacjonarny dla $|\alpha + \beta| < 1$. W takim przypadku σ_t^2 powraca do swojej długookresowej wartości, określającej wariancję bezwarunkową:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)},$$

Jeżeli $|\alpha + \beta| = 1$ to stosuje się model IGARCH (Integrated GARCH,Engle i Bollerslev, 1986)

Estymacja modelu GARCH(1,1) warunkową MNW

- Łączny rozkład prawdopodobieństwa obserwacji:

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_T) = p(y_T|\Omega_{T-1}) \times p(y_{T-1}|\Omega_{T-2}) \times \ldots \times p(y_1),$$

  gdzie Ω_t oznacza informację dostępną w momencie t.
- dla $t = 1$ przyjmujemy, że σ_1^2 jest równa wariancji w próbie
- dla $t > 1$ wartość σ_t^2 wyznaczamy rekurencyjnie
- funkcja gęstości wynosi: $y_t|\Omega_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$
- Wartość funkcji wiarygodności:

$$\mathcal{L}(\theta; y_1, \ldots, y_T|\sigma_1^2) = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right),$$

  gdzie θ jest wektorem parametrów występujących w modelu GARCH.

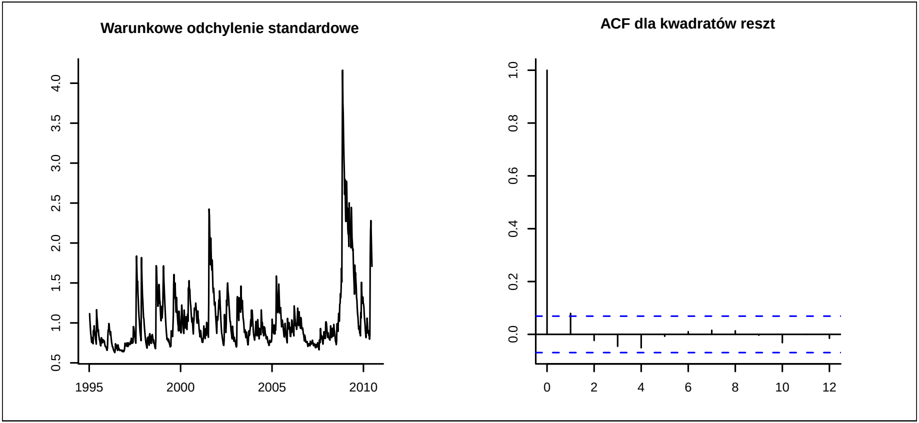
Model ARMA(1,1)-GARCH(1,1) dla kursu EUR/PLN

```
Oszacowania modelu GARCH(1,1)

        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
mu       0.01190     0.02168    0.549 0.583245
ar1      0.57058     0.13600    4.196 2.72e-05 ***
ma1     -0.36084     0.15527   -2.324 0.020123 *
omega    0.07981     0.04019    1.986 0.047067 *
alpha1   0.16178     0.04223    3.831 0.000128 ***
beta1    0.77667     0.06972   11.140  < 2e-16 ***

Standardised Residuals Tests:
                                Statistic p-Value
 Jarque-Bera Test   R    Chi^2  403.1       0
 Ljung-Box Test     R    Q(10)  7.72      0.656
 Ljung-Box Test     R    Q(20)  15.3      0.757
 Ljung-Box Test     R^2  Q(10)  10.6      0.39
 Ljung-Box Test     R^2  Q(20)  24.4      0.224
 LM Arch Test       R    TR^2   10.1      0.609
```

Model ARMA(1,1)-GARCH(1,1) dla kursu EUR/PLN



Leptokurtoza

- W wielu przypadkach nie tylko bezwarunkowy, ale także warunkowy rozkład składników losowych jest leptokurtyczny.
- Skutkiem nieuwzględnienia tego zjawiska jest np. mylna prognoza przedziałowa dla analizowanej zmiennej (m.in. nie uwzględnienie ryzyka dużych strat)
- Bollerslev (1987) proponuje, aby przyjąć, że składnik losowy ma rozkład t-Studenta lub rozkład GED (general error distribution). Rozkład GED względnie dobrze opisuje własności rozkładów składnika losowego wokół wartości oczekiwanej, tj. ich „smukłość", natomiast rozkład t-Studenta jest dopasowany do modelowania „grubych ogonów".
- Bardziej popularny jest rozkład t-Studenta

Rozkład t-Studenta

- Dla $y \sim t(\mu, \sigma^2, v)$ funkcja gęstości jest postaci:

$$p(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{\pi(v-2)\sigma_t^2}}\left(1 + \frac{(y-\mu)^2}{(v-2)\sigma^2}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)},$$

  gdzie $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} exp(-x)dx$ oznacza funkcję Gamma.
- Dla $v \to \infty$ rozkład $t(\mu, \sigma^2, v)$ pokrywa się z rozkładem $N(\mu, \sigma^2)$.
- Funkcja wiarygodności dla modelu GARCH wynosi:

$$\mathcal{L}(\theta; y_1, \ldots, y_T | \sigma_1^2) = \prod_{t=1}^{T} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{\pi(v-2)\sigma_t^2}}\left(1 + \frac{(y_t-\mu_t)^2}{(v-2)\sigma_t^2}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)},$$

  gdzie θ jest wektorem parametrów występujących w modelu GARCH, w skład których wchodzi także parametr v określający liczbę stopni swobody rozkładu t-Studenta.

Rozkład *GED*

- Dla $y \sim GED(\mu, \sigma^2, v)$ funkcja gęstości jest postaci::

$$p(y) = \frac{v \exp\left(-\frac{1}{2}\left|\frac{y-\mu}{\lambda\sigma}\right|^v\right)}{2^{\frac{v+1}{v}}\Gamma\left(\frac{1}{v}\right)\lambda\sigma},$$

gdzie $\lambda = \left(\frac{\Gamma(1/v)}{2^{2/v}\Gamma(3/v)}\right)^{1/2}$.

- Dla $v = 2$ rozkład $GED(\mu, \sigma^2, v)$ pokrywa się z rozkładem $N(\mu, \sigma^2)$
- Funkcja wiarygodności jest postaci:

$$\mathcal{L}(\theta; y_1, \ldots, y_T | \sigma_1^2) = \prod_{t=1}^{T} \frac{v \exp\left(-\frac{1}{2}\left|\frac{y_t-\mu_t}{\lambda\sigma_t}\right|^v\right)}{2^{\frac{v+1}{v}}\Gamma\left(\frac{1}{v}\right)\lambda\sigma_t},$$

gdzie θ jest wektorem parametrów występujących w modelu GARCH, w skład których wchodzi także parametr v określający kształt rozkładu *GED*.

Wybór specyfikacji modelu GARCH

1. Wybrać najlepszą specyfikację równania dla poziomów (postać funkcji μ_t)
2. Określić wartości dla P i Q w równaniu wariancji na podstawie analizy funkcji ACF i PACF dla kwadratów reszt lub kryteriów informacyjnych AIC lub BIC.
3. Sprawdzić, czy wystandardyzowane reszty $u_t = e_t/\sigma_t$ mają rozkład normalny. Jeżeli nie, wybrać rozkład t-Studenta lub GED.
4. W większości przypadków najwłaściwszy jest model GARCH(1,1) ze składnikiem losowym o warunkowym rozkładzie t-Studenta.

Wybór specyfikacji - przykład dla EUR/PLN

Wartości kryterium BIC

Normal distribution

	q=0	q=1	q=2	q=3	q=4
p=1	2.96	2.85	2.84	2.85	2.85
p=2	2.88	2.86	2.85	2.86	2.85
p=3	2.88	2.86	2.86	2.87	2.86
p=4	2.88	2.87	2.87	2.87	2.87

t-Student distribution

	q=0	q=1	q=2	q=3	q=4
p=1	2.82	2.76	2.77	2.77	2.78
p=2	2.80	2.77	2.78	2.78	2.79
p=3	2.80	2.78	2.79	2.79	2.79
p=4	2.80	2.79	2.79	2.80	2.80

Prognozowanie z modelem GARCH

- Główne zastosowanie modeli GARCH: prognozowanie zmienności oraz tworzenie prognoz przedziałowych
- Algorytm liczenia prognozy zmienności z modelu GARCH jest bardzo podobny do algorytmu wyznaczenia prognozy punktowej z modelu ARMA
- Dla modelu GARCH(1,1) prognoza na okres $T+1, T+2, \ldots$ wykorzystuje równanie wariancji postaci:

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \beta)\sigma_{t-1}^2 + \alpha\eta_{t-1}$$

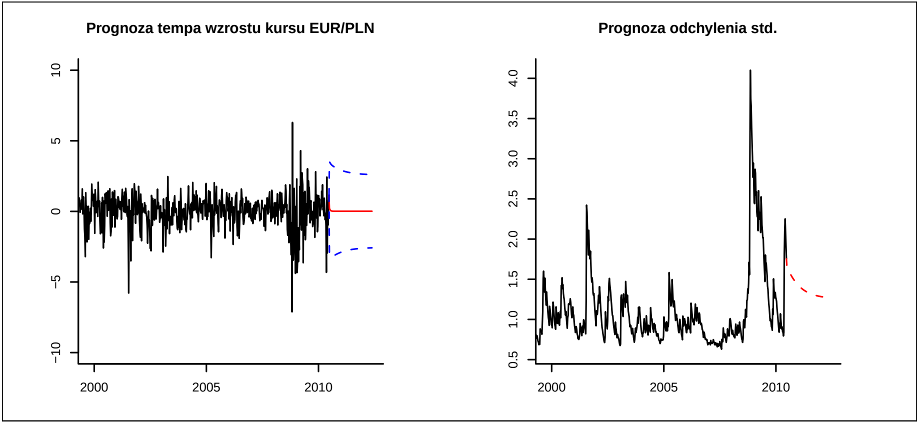
  oraz fakt, że w okresie prognozy:

$$E(\eta_{T+k}|\Omega_T) = 0.$$

- Wartości prognozy:

$$E(\sigma_{T+1}^2|\Omega_T) = \omega + \alpha e_T^2 + \beta\sigma_T^2$$
$$E(\sigma_{T+h}^2|\Omega_T) = \omega + (\alpha + \beta)E(\sigma_{T+h-1}^2|\Omega_T)$$
$$E(\sigma_{T+h}^2|\Omega_T) = \omega\left(\frac{1-(\alpha+\beta)^h}{1-(\alpha+\beta)}\right) + (\alpha+\beta)^{h-1}(\alpha e_T^2 + \beta\sigma_T^2)$$

Prognozowanie z modelem GARCH - przykład



Niesymetryczne modele klasy ARCH

- W modelu GARCH warunkowa wariancja σ_t^2 zależy od kwadratów przeszłych realizacji składnika losowego, niezależnie od ich znaku
- Dla akcji ujemne wartości ϵ_t bardziej wpływają na σ_t^2 niż wartości dodatnie ze względu na efekt dźwigni (leverage effect). Spadek ceny akcji prowadzi do wzrostu relacji zadłużenia do wartości rynkowej i wzrostu wahliwości strumienia dywidend przypadających na jedną akcję
- Także dla walut gospodarek rozwijających się (zadłużonych w walutach obcych) silna deprecjacja waluty krajowej w większym stopniu prowadzi do wzrostu zmienności niż aprecjacja
- Propozycje modelowania niesymetrycznej odpowiedzi wariancji:
  1. model GJR-GARCH (Glosten-Jagannathan-Runkle, 1993)
  2. Model wykładniczy EGARCH (Exponential GARCH, Nelson, 1991)

Model GJR-GARCH

Specyfikacja modelu GJR-GARCH(P,Q):

$$
\begin{aligned}
y_t =& \mu_t + \epsilon_t \\
\sigma_t^2 =& \omega + \sum_{p=1}^{P} (\alpha_p \epsilon_{t-p}^2 + \gamma_p \epsilon_{t-p}^2 I(\epsilon_{t-p} < 0)) + \sum_{q=1}^{Q} \beta_q \sigma_{t-q}^2,
\end{aligned}
$$

gdzie $\omega > 0$, $\alpha_p \geq 0$, $\beta_q \geq 0$ oraz $\gamma_p \geq 0$ dla $p \in \{1, 2, \ldots, P\}$ i $q \in \{1, 2, \ldots, Q\}$, zaś:

$$
I(\epsilon_t < 0) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \epsilon_t < 0 \\ 0 & \text{dla } \epsilon_t \geq 0. \end{cases}
$$

Dla γ_p istotnie większych od zera występuje efekt dźwigni

UWAGA: ze względu na restrykcje nałożone na parametry modelu GJR-GARCH, przy modelowaniu kursu walutowego ważne jest, czy dodatnie tempo wzrostu opisuje aprecjację, czy deprecjację waluty krajowej.

Model EGARCH

- Specyfikacja modelu EGARCH(P, Q):

$$
\begin{aligned}
y_t =& \mu_t + \epsilon_t \\
\ln(\sigma_t^2) =& \omega + \sum_{p=1}^{P} \alpha_p \frac{|\epsilon_{t-p}| + \gamma_p \epsilon_{t-p}}{\sigma_{t-p}} + \sum_{q=1}^{Q} \beta_q \ln(\sigma_{t-q}^2).
\end{aligned}
$$

- Wpływ ϵ_{t-p} na $\ln(\sigma_t^2)$:
  - Dla $\epsilon_{t-p} < 0$ wpływ wynosi $\alpha_p(1 - \gamma_p)|\epsilon_{t-p}|/\sigma_{t-p}$
  - Dla $\epsilon_{t-p} \geq 0$ wpływ wynosi $\alpha_p(1 + \gamma_p)|\epsilon_{t-p}|/\sigma_{t-p}$.
- Efekt dźwigni dla $\alpha_p > 0$ oraz $\gamma_p < 0$ lub $\alpha_p < 0$ oraz $\gamma_p > 0$.
- Ponieważ objaśniany jest logarytm wariancji to:
  - wartość σ_t^2 jest dodatnia dla dowolnych parametrów ω, α_p, β_q oraz γ_p
  - wpływ nietypowych realizacji ϵ_t na σ_t^2 jest większy niż w podstawowym modelu GARCH.

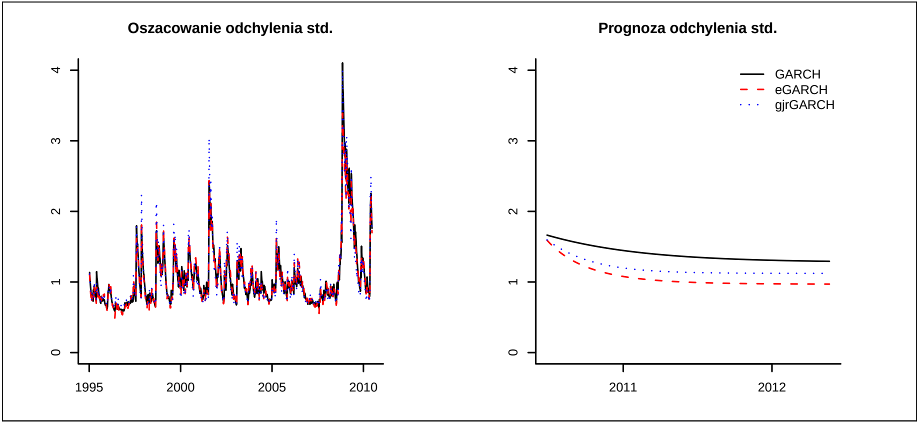
Model EGARCH - przykład

Wyniki estymacji modelu EGARCH(1,1)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
mu	-0.017313	0.043069	-0.40198	0.687702
ar1	0.621055	0.129973	4.77833	0.000002
ma1	-0.426653	0.152674	-2.79453	0.005198
omega	-0.003541	0.011786	-0.30047	0.763821
alpha1	-0.074149	0.039947	-1.85616	0.063431
gamma1	0.295727	0.060650	4.87594	0.000001
beta1	0.944179	0.025215	37.44560	0.000000
shape	5.378292	0.993750	5.41212	0.000000

Ponieważ $\gamma > 0$ oraz $\alpha < 0$ wyniki wskazują na występowanie efektu dźwigni: deprecjacja złotego bardziej wpływa na zmienność kursu EUR/PLN niż aprecjacja złotego

Modele asymetryczne - przykład



Model GARCH-M

- Jeżeli inwestorzy charakteryzują się awersją do ryzyka, to oczekiwana stopa zwrotów z aktywów o wysokim ryzyku powinna być wyższa niż dla aktywów o niskim ryzyku (Mehra i Prescott, 1985, pokazują, że stopy zwrotu z akcji są przeciętnie o 6 pkt proc. wyższe niż stopy zwrotu z obligacji)
- Zależność między μ_t i σ_t^2 uwzględnia sie w ramach modeli typu GARCH-M (GARCH in Mean, Engle, Lilien i Ronbins, 1987) postaci:

$$\begin{aligned} y_t =& \mu_t + \delta\sigma_t + \epsilon_t \\ \sigma_t^2 =& \omega + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_P\epsilon_{t-P}^2 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \ldots + \beta_Q\sigma_{t-Q}^2, \end{aligned}$$

- Alternatywne specyfikacje:

$$\begin{aligned} y_t =& \mu_t + \delta\sigma_t^2 + \epsilon_t \\ y_t =& \mu_t + \delta\ln\sigma_t + \epsilon_t \end{aligned}$$

Model GARCH-M: przykład

Oszacowanie modelu GARCH-M(1,1), wersja z odchyleniem standardowym

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
mu	-0.19352	0.150975	-1.2818	0.199917
ar1	0.62041	0.133745	4.6387	0.000004
ma1	-0.44343	0.155727	-2.8475	0.004407
inmean	0.23008	0.164400	1.3995	0.161652
omega	0.04462	0.027759	1.6074	0.107958
alpha1	0.15252	0.049113	3.1054	0.001900
beta1	0.82477	0.058798	14.0272	0.000000
shape	4.95360	0.854227	5.7989	0.000000