Rozdział 6. Strukturalne modele VAR

MODELOWANIE POLSKIEJ GOSPODARKI z R

Wprowadzenie do modeli SVAR

Krytyka modeli wielorównaniowych z lat 50-tych i 60-tych postaci:

$$By_t + \Gamma x_t = \epsilon_t,$$

- arbitralny podział zmiennych modelu na endogeniczne i egzogeniczne;
- narzucenie a-priori postaci dynamicznej modelu;
- narzucanie warunków zerowych na macierze B i Γ (niekoniecznie spójnych z danymi oraz teorią ekonomii) w celu zapewnienia identyfikowalności modelu;
- słabe własności prognostyczne oraz symulacyjne;
- brak odporności na krytykę Lucasa, tj. nieuwzględnienie oczekiwań podmiotów gospodarczych.

Wprowadzenie do modeli SVAR

Sims (1980) zaproponował nowe podstawy łącznego modelowania wielu zmiennych ekonomicznych za pomocą strukturalnych modeli VAR, które:

- nie zakładają podziału a-priori na zmienne endogeniczne i egzogeniczne;
- nie nakładają warunków zerowych;
- mają bogatą specyfikację dynamiczną;
- są odporne na krytykę Lucasa.

Wprowadzenie do modeli SVAR

Modele SVAR a zmiana myślenia o funkcjonowaniu gospodarki:

Tradycyjny model wielorównaniowy:
Interpretacja pojedynczych współczynników, określanych jako mnożniki

Model SVAR
Interpretacja dynamicznej reakcji na zewnętrzne szoki strukturalne

Przyczynowość

Uwzględnienie zależności między zmiennymi z i x:

Tradycyjny model wielorównaniowy:
Uwzględnienie zmiennej x w roli regresora w równaniu dla zmiennej z

Model VAR
Testy przyczynowości

Definicja przyczynowości (Granger, 1969):

> *Zmienna x jest przyczyną z, jeżeli bieżące wartości z można prognozować z większą dokładnością przy użyciu przeszłych wartości x niż bez ich wykorzystania, przy nie zmienionej pozostałej informacji.*

Przyczynowość

Niech wektor zmiennych endogenicznych $y_t = [z_t,\ x_t]$, gdzie z_t i x_t są wymiarów N_1 oraz N_2, $N_1 + N_2 = N$. Model VAR można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} z_t \\ x_t \end{bmatrix} = \sum_{p=1}^{P} \begin{bmatrix} A_{p(11)} & A_{p(12)} \\ A_{p(21)} & A_{p(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t-i} \\ x_{t-i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_t^z \\ \epsilon_t^x \end{bmatrix}.$$

W celu ustalenia czy x jest przyczyną wektora z testujemy:

$$\begin{aligned} H_0 &: \forall_{1 \leq p \leq P} A_{p(12)} = 0 \\ H_1 &: \exists_{i \leq p \leq P} A_{p(12)} \neq 0. \end{aligned}$$

Przy prawdziwości H_0 statystyka testu Walda ma rozkład F-Snedecora o $v_1 = P \times N_1 \times N_2$ oraz $v_2 = TN - PN^2$ stopniach swobody.

Przyczynowość

- Przyczynowość w sensie Grangera nie analizuje występowania jednoczesnych zależności (instantaneous causality), które są opisywane przez macierz kowariancji:
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix},$$
- Zespół hipotez dla jednoczesnej przyczynowości:
$$\begin{aligned} H_0 &: \Sigma_{12} = 0 \\ H_1 &: \Sigma_{12} \neq 0. \end{aligned}$$
Przy prawdziwości H_0 odpowiednia statystyka ma rozkład χ^2 o $N_1 \times N_2$ stopniach swobody.
- Symetryczność testu: jeżeli z jest „jednoczesną przyczyną" dla x to jest to równoznaczne z faktem, że x jest „jednoczesną przyczyną" dla z

Postać modelu SVAR

- Model VAR w postaci strukturalnej (postać SVAR):

$$Ay_t = C_0 + C_1 y_{t-1} + \cdots + C_P y_{t-P} + B\eta_t, \eta_t \sim N(0, I_N)$$

- Składniki losowe η_{nt} względem siebie niezależne - można im nadać interpretacji ekonomicznej. Z tego względu określane są jako szoki strukturalne
- A i B określają jednoczesne zależności między zmiennymi endogenicznymi, zaś macierze $\{C_i : i = 1, 2, \ldots, P\}$ dynamiczne własności modelu
- Bezpośrednia estymacja modelu SVAR niemożliwa ze względu na problem identyfikowalności: parametry modelu SVAR są uzyskiwane na podstawie oszacowań modelu VAR, zaś proces określany jest jako strukturalizacja modelu VAR.

Funkcja reakcji na impuls

- W modelu *SVAR* analiza funkcjonowania gospodarki dokonywana poprzez analizę dynamicznej reakcji $\{y_i : i = 1, 2, \ldots, N\}$ na szoki strukturalne $\{\eta_j : j = 1, 2, \ldots, N\}$.
- Reakcja określana jako funkcja reakcji na impuls (impulse-response function, IRF):

$$IRF_{k(ij)} = \frac{\partial y_{i,t+k}}{\partial \eta_{jt}}.$$

- Wartość IRF dla wszystkich zmiennych względem wszystkich szoków:

$$IRF_k = \frac{\partial y_{t+k}}{\partial \eta_t} = [IRF_{k(ij)}]_{N\times N}.$$

można obliczyć poprzez zapisanie modelu w postaci SVMA(∞):

$$y_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k \eta_{t-k}.$$

gdzie $\Psi_k = IRF_k$ są macierzami o wymiarach $N \times N$.:

Funkcja reakcji na impuls

Etapy przekształcenia modelu SVAR do postaci SVMA(∞) dokonuje się w następujących krokach.

1. Zapisać model SVAR w postaci zredukowanej (model VAR):

$$y_t = A^{-1}C_0 + A^{-1}C_1 y_{t-1} + \cdots + A^{-1}C_P y_{t-P} + A^{-1}B\eta_t, \epsilon_t = A^{-1}B\eta_t$$

2. Zapisać model VAR w postaci VMA(∞):

$$y_t = \mu + \epsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i \epsilon_{t-i}.$$

3. Biorąc pod uwagę zależność $\epsilon_t = A^{-1}B\eta_t$ wartości IRF liczymymy jako:

$$\Psi_i = \Theta_i A^{-1} B.$$

Funkcja skumulowanej reakcji na impuls

- Niech $y_{it} = \Delta z_{it}$, np. y_{it} jest dynamiką PKB, zaś z_{it} określa poziom PKB.
- W modelu VAR występuje zmienna y_{it}, a nas interesuje wpływ j-tego szoku strukturalnego η_j na zmienną z_i
- W takim przypadku liczy się skumulowany IRF:

$$AIRF_{k(ij)} = \frac{\partial z_{i,t+k}}{\partial \eta_{jt}} = \sum_{m=0}^{k} IRF_{k(ij)}$$

FEVD

- Wariancja błędu losowego prognozy dla y_t na k okresów do przodu wynosi:

$$\Sigma_k = Var(y_{T+k} - y^f_{T+k}) = \sum_{m=0}^{k-1} \Psi_m \Psi'_m.$$

- Wartość błędu losowego prognozy dla y_{it} na k okresów do przodu wynosi:

$$\Sigma_{k(ii)} = \sum_{j=1}^{N} (\Psi^2_{0(ij)} + \Psi^2_{1(ij)} + \ldots + \Psi^2_{k-1(ij)}).$$

- Dekompozycja wariancji błędu prognozy (forecast error variance decomposition, FEVD) określa jaka część $\Sigma_{k(ii)}$ wynika z występowania kolejnych szoków strukturalnych $\{\eta_{jt} : j = 1, 2, \ldots, N\}$.

$$FEVD_{k(ij)} = \frac{\Psi^2_{0(ij)} + \Psi^2_{1(ij)} + \ldots + \Psi^2_{k-1(ij)}}{\Sigma_{k(ii)}}$$

- Dla $k \to \infty$ FEVD jest interpretowana jako dekompozycja wariancji dla zmiennych endogenicznych modelu VAR

Strukturalizacja modelu VAR

- Parametry modelu SVAR uzyskujemy na podstawie oszacowań parametrów modelu VAR postaci:

$$\begin{aligned} \text{Model SVAR} : Ay_t &= C_0 + C_1 y_{t-1} + \cdots + C_P y_{t-P} + B\eta_t, \;\; Var(\eta_t) = I \\ \text{Model VAR} \;\; : \;\; y_t &= A_0 + A_1 y_{t-1} + \cdots + A_P y_{t-P} + \epsilon_t, \;\; Var(\epsilon_t) = \Sigma. \end{aligned}$$

- Liczba parametrów modelu SVAR: $K_{SVAR} = (P+2)N^2 + N$, modelu VAR: $K_{VAR} = PN^2 + N + \frac{N(N+1)}{2}$. Ostatnia część sumy dla K_{VAR} wynika z występowania parametrów w macierzy Σ
- Liczba niezbędnych restrykcji (tj. warunków identyfikujących):

$$K = K_{SVAR} - K_{VAR} = N^2 + \frac{N(N-1)}{2}$$

- Zależności: $\epsilon_t = A^{-1}B\eta_t$ oraz $\Sigma = A^{-1}BB'(A^{-1})'$.

Strukturalizacja krótkookresowa

- Strukturalizacja rekursywna:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B = \begin{bmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{bmatrix}$$

- Parametry nożna wyznaczyć rozwiązując układ $N(N+1)/2$ równań z $N(N+1)/2$ niewiadomymi postaci $\Sigma = A^{-1}BB'(A^{-1})'$
- Dekompozycja Cholesky'ego: dla każdej dodatnio określonej symetrycznej macierzy kwadratowej Σ wymiaru $N \times N$ o wartościach rzeczywistych istnieje unikalna (co do znaku), nieosobliwa dolnotrójkątna macierz P, taka że $\Sigma = PP'$.

Strukturalizacja krótkookresowa

- Przykład strukturalizacji nierekursywnej (Kim i Roubini, 2000): dla wektora y_t składającego się z pięciu zmiennych: PKB, cen , podaży pieniądza, stóp procentowych oraz kursu walutowego:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 & * \\ * & * & * & * & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

- Strukturalizacja ta oznacza, że:
  - PKB nie reaguje na bieżące wartości pozostałych zmiennych;
  - Ceny reagują jedynie na zmiany PKB;
  - Pieniądz reaguje na zmiany PKB, cen i stopy procentowej;
  - Bank centralny ustala stopy procentowe wykorzystując informację na temat podaży pieniądza oraz kursy walutowego, a także pośrednio poziomu PKB i cen;
  - Kurs walutowy dyskontuje wszystkie dostępne informacje.

Strukturalizacja długookresowa

- W wielu przypadkach teoria ekonomii wskazuje, że pewne szoki nie mają długookresowego wpływu na jedną ze zmiennych występujących w modelu SVAR (np. szok monetarny nie ma długookresowego wpływu na wielkość produktu)
- strukturalizacji modelu VAR poprzez narzucenie długookresowych restrykcji identyfikujących (metoda Blancharda i Quah)
- Nakładanie restrykcji na macierz:

$$\Phi = \lim_{k \to \infty} AIRF_k = (I - A_1 - \ldots - A_P)^{-1} A^{-1} B.$$

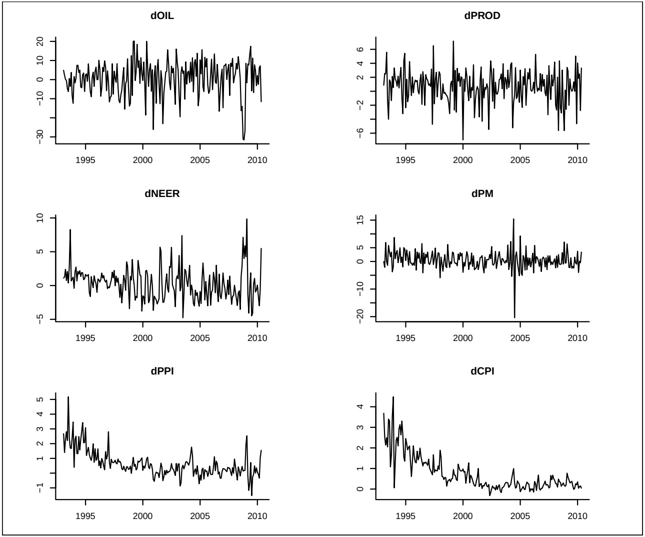
Przykład - model pass-through dla Polski

Zmienne wchodzące w skład wektora y_t:

- Dynamika cen ropy: ΔOIL_t;
- Dynamika produkcji przemysłowej w Polsce: $\Delta PROD_t$;
- Dynamika nominalnego, efektywnego kursu złotego: $\Delta NEER_t$;
- Inflacja cen importu: ΔPM_t;
- Inflacja cen produkcji w przemyśle: ΔPPI_t;
- Inflacja cen konsumenta: ΔCPI_t.

Próba: 1993:2 - 2010:5.

Przykład - model pass-through dla Polski



Przykład - model pass-through dla Polski

Oszacowanie macierzy B modelu SVAR:

	dOIL	dProd	dNEER	dPM	dPPI	dCPI
dOIL	9.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
dProd	0.028	2.267	0.000	0.000	0.000	0.000
dNEER	-0.261	0.091	2.127	0.000	0.000	0.000
dPM	-0.060	0.109	0.773	2.301	0.000	0.000
dPPI	0.043	-0.001	0.237	-0.021	0.546	0.000
dCPI	0.004	-0.028	0.004	-0.019	0.225	0.362

Przykład - model pass-through dla Polski

Skumulowany IRF na szok kursowy

	NEER	PM	PPI	CPI
k=0	2.13	0.77	0.24	0.00
k=1	2.74	1.72	0.39	0.05
k=2	2.66	1.70	0.41	0.14
k=4	2.78	1.69	0.59	0.32
k=10	3.13	2.02	0.95	0.70
k=20	3.42	2.33	1.32	1.10
k=40	3.65	2.58	1.63	1.45
k=60	3.72	2.66	1.72	1.55

Przykład - model pass-through dla Polski

Dekompozycja wariancji prognozy dla dCPI

	dOIL	dProd	dNEER	dPM	dPPI	dCPI
FEVD, k=0	0.0	0.4	0.0	0.2	27.6	71.8
FEVD, k=1	0.6	0.3	1.0	0.2	29.6	68.3
FEVD, k=2	1.1	1.8	3.9	0.7	28.3	64.2
FEVD, k=3	1.0	3.0	6.3	0.8	28.3	60.7
FEVD, k=4	0.8	2.6	7.3	0.8	30.0	58.5
FEVD, k=10	0.7	2.3	10.4	0.9	31.1	54.6
FEVD, k=20	0.6	2.1	11.9	0.8	31.7	52.9
FEVD, k=60	0.6	2.1	12.4	0.7	32.0	52.3

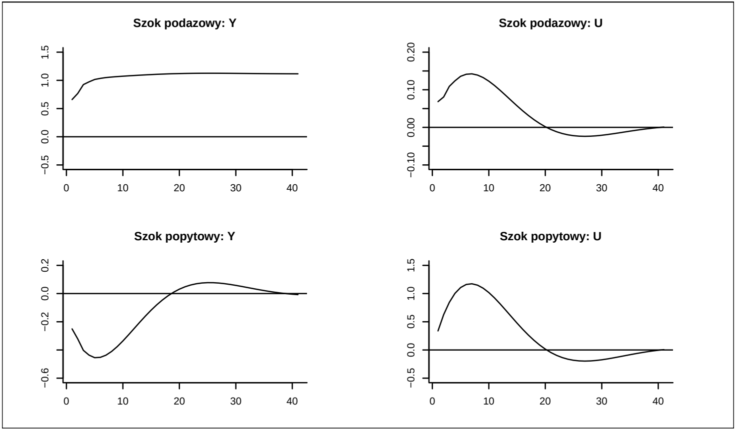
Przykład - model BQ dla Polski

Model SVAR dla tempa wzrostu PKB oraz stopy bezrobocia w Polsce (model VAR analizowany w rozdziale 5)

```
Oszacowania modelu SVAR:

Reakcja natychmiastowa (macierz B):

     eta_1   eta_2
dY   0.66   -0.25
U    0.07    0.34

Reakcja długookresowa (macierz Phi):

     eta_1   eta_2
dY   1.12     0.0
U    1.48    11.9
```

Przykład - model BQ dla Polski

Funkcja reakcji na impuls



Egzogeniczność w modelach VAR

- Model VARX (dynamiczny model o równaniach współzależnych)

$$y_t = A_0 + A_1 y_{t-1} + \ldots + A_P y_{t-P} + B_0 x_t + \ldots + B_S x_{t-S} + \epsilon_t,$$

- Zmienne x_t są egzogeniczne, tj. nie są objaśniane przez model
- Różne definicje egzogeniczności

Egzogeniczność w modelach VAR

- Słaba egzogeniczność: oszacowania parametrów θ rozkładu warunkowego $g(y|x)$ nie zależą od rozkładu brzegowego $h(x)$, tj. $Cov(y - E(y|x), x - E(x)) = 0$
- Silna egzogeniczność: warunkowa prognoza y względem x nieistotnie różna od prognozy na podstawie całego modelu (w którym x zależy także od y). Czyli, wynik prognozy dla y nie wpływa na założenia dla przyszłych wartości x (połączenie słabej egzogeniczności z przyczynowością Grangera).
- Super egzogeniczność: kształt IRF dla y nie zależy od tego, czy jest obliczany na podstawie modelu warunkowego $g(y|x)$ (np. VARX) czy pełnego modelu $f(y,x)$ (np. VAR).
- Całkowita egzogeniczność: wartości składnika losowego $\omega = y - E(y|x)$ są niezależne względem przeszłych, teraźniejszych oraz przyszłych wartości zmiennej x, tj. $Cov(\omega_t, x_{t+s}) = 0$ dla $s \in \mathcal{C}$.