

Rozdział 2. Analiza spektralna

MODELOWANIE POLSKIEJ GOSPODARKI z R

Widmo szeregu czasowego

W analizie spektralnej szereg $\{y_t : t = 1, 2, \dots, T\}$ postrzegany jest jako nieskończona suma szeregów o różnych częstotliwościach ω , którym odpowiadają okresy wahań $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$.

Podstawowym pojęciem w analizie spektralnej jest **widmo** określane także jako **spektrum**.

Widmo - intuicja

Rozważmy regresję (l. parametrów $2M + 1$ równa liczbie obserwacji T):

$$y_t = \mu + \sum_{j=1}^M \{ \alpha_j \cos(\omega_j t) + \beta_j \sin(\omega_j t) \} + \epsilon_t$$

gdzie $\omega_j = j \frac{2\pi}{T}$ odpowiada cykлом o okresach $\tau_j = \frac{2\pi}{\omega_j} = \frac{T}{j}$.

Ponieważ zmienne $\sin(\omega_j t)$ oraz $\cos(\omega_j t)$:

- są wzajemnie ortogonalne
- mają wartość oczekiwaną 0 (czyli $E(y_t) = \mu$)
- oraz wariancję $\frac{1}{2}$

to wariancja zmiennej y_t wynosi:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \{ \alpha_j^2 + \beta_j^2 \}$$

Czyli, możemy dokonać dekompozycji σ^2 na M częstotliwości z przedziału $[0, \pi]$, gdzie wpływ wahań o częstotliwości ω_j wynosi:

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{2} (\alpha_j^2 + \beta_j^2)$$

Widmo - transformata Fouriera

Widmo procesu Y_t jest dane przez transformatę Fouriera dla funkcji autokowariancji ($\gamma_j = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-j})$):

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-ij\omega}$$

Uwzględniając:

- Symetryczność autokowariancji: $\gamma_{-j} = \gamma_j$
- Wzór de Eulera: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
- Wzory: $\cos(-x) = \cos x$ i $\sin(-x) = -\sin x$

powyższy wzór można przekształcić do:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(j\omega) \right)$$

Ponieważ $f(-\omega) = f(\omega)$ oraz $f(2\pi + \omega) = f(\omega)$ wartości widma podaje się dla $\omega \in [0, \pi]$.

Widmo - odwrotna transformata Fouriera

Dla widma $f(\omega)$ wartość autokowariancji jest dana przez **odwrotną transformatę Fouriera**:

$$\gamma_j = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \cos(j\omega) d\omega \text{ dla } j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Implikuje to, że wartość wariancji dla Y_t :

$$\gamma_0 = 2 \int_0^{\pi} f(\omega) d\omega.$$

oraz wkład wahań o częstotliwościach $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ do całkowitej wariancji procesu Y_t :

$$2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega) d\omega.$$

Oszacowanie widma

Dwie metody oszacowania widma na podstawie szeregu czasowego $\{y_t : t = 1, 2, \dots, T\}$:

1 Oszacowanie modelu AR(P) postaci

$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + \dots + \rho_p y_{t-p} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2).$$

oraz podstawienie oszacowań parametrów do wzoru:

$$f(\omega) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi} \left(\frac{1}{\prod_{p=1}^P (1 + \rho_p^2 - 2\rho_p \cos(p\omega))} \right)$$

2 Wykorzystanie dyskretnej transformaty Fouriera (DFT):

$$x_s = \sum_{t=0}^{T-1} y_t e^{-2\pi i s t / T}$$

oraz obliczenie [periodogramu](#) jako:

$$\hat{f}(\omega_s) = \frac{1}{T^2} |x_s|^2.$$

który można przekształcić do:

$$\hat{f}(\omega_s) = \frac{1}{2\pi} \left(\hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^{T-1} \hat{\gamma}_j \cos(j\omega_s) \right)$$

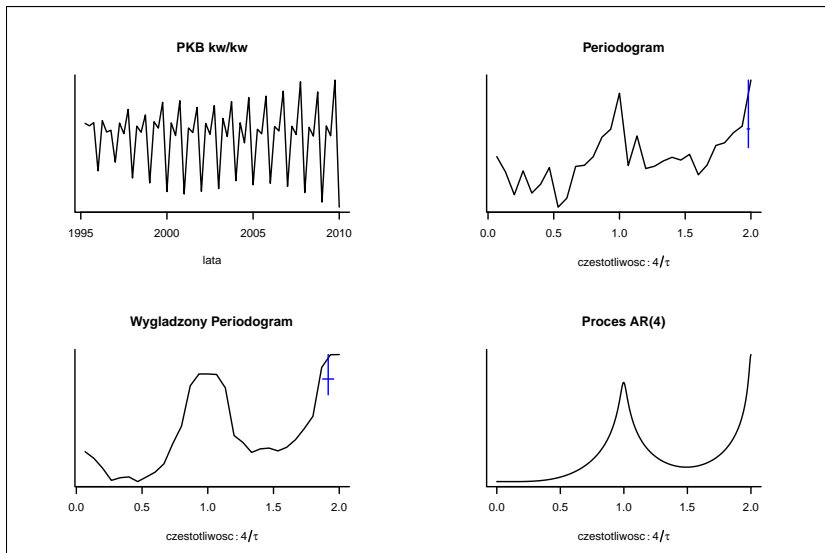
Wygładzony periodogram

- Wartości periodogramu liczone jedynie dla poszczególnych wartości ω_s , zaś jego wykres charakteryzuje się dużą zmiennością (utrudniony odczyt)
- **Wygładzenia** ułatwia odczyt periodogramu
- Wygładzona wartość periodogramu dla częstotliwości ω :

$$\bar{f}(\omega) = \sum_{x=-h}^h \nu(x) \hat{f}(\omega + x),$$

gdzie h określa **szerokość pasma przenoszenia** (bandwidth), zaś $\nu(x)$ jest funkcją określającą tzw. **okno spektralne** (spectral window) przypisywane sąsiadnym częstotliwościom, które spełniają zależność $\sum_{x=-h}^h \nu(x) = 1$.

Przykład - kwartalne tempo PKB



Filtry liniowe

Filtr liniowy definiujemy jako:

$$x_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j y_{t-j} = \psi(L)y_t$$

Filtry, które eliminują trend stochastyczny lub deterministyczny muszą spełniać następujące warunki:

- 1 Wagi sumują się do zera: $\psi(1) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j = 0$
- 2 Wagi są symetryczne: $\psi_j = \psi_{-j}$

Filtry liniowe

Filtrowi liniowemu $x_t = \psi(L)y_t$ w dziedzinie częstotliwości odpowiada **funkcja odpowiedzi częstotliwościowej** (frequency response function):

$$\Psi(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-i\omega j},$$

która definiuje widmo dla zmiennej x_t :

$$f_x(\omega) = |\Psi(\omega)|^2 f_y(\omega)$$

gdzie $|\Psi(\omega)|^2$ jest **funkcją transferową** (transfer function), zaś $|\Psi(\omega)|$ określone jest jako **wzmocnienie** (gain).

Filtry liniowe - przykład

Zilustrujmy powyższe rozważania na przykładzie filtru przyrostowego:

$x_t = y_t - y_{t-1}$, dla którego $\psi(L) = 1 - L$.

Funkcja odpowiedzi częstotliwościowej wynosi:

$$\Psi(\omega) = 1 - e^{-i\omega} = 1 - \cos(\omega) + i \sin(\omega),$$

zaś funkcja transferowa przyjmuje postać:

$$|\Psi(\omega)|^2 = |1 - \cos(\omega) + i \sin(\omega)|^2 = 2 - 2 \cos(\omega).$$

W rezultacie:

$$f_x(\omega) = (2 - 2 \cos(\omega))f_y(\omega).$$

Filtr przyrostowy uwypukla znaczenie wahań o wysokich częstotliwościach (gdy ω jest bliska $\frac{\pi}{2}$) oraz pochłania wahań o niskich częstotliwościach (gdy ω jest bliska 0). Ponadto, jest to filtr asymetryczny: powoduje przesunięcie fazowe widma dla x_t względem widma dla y_t

Idealny filtr pasmowo-przepustowy

- Zdefiniujemy **filtr pasmowo-przepustowy** (band-pass) jako filtr liniowy, dla którego x_t jest częścią y_t , związana z wahaniami o częstotliwościach z przedziału $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$.
- Przykładowo, jeżeli dla kwartalnych danych x_t jest częścią y_t o waniach z przedziału od 6 do 40 kwartałów to $\omega_1 = \frac{\pi}{20}$ oraz $\omega_2 = \frac{\pi}{3}$.
- Dla nieskończonej liczby obserwacji wagi **idealnego filtra pasmowego (IF)** wynoszą:

$$\psi_j = \begin{cases} \frac{\sin(j\omega_2) - \sin(j\omega_1)}{\pi j} & \text{dla } j \neq 0 \\ \frac{\omega_2 - \omega_1}{\pi} & \text{dla } j = 0. \end{cases}$$

- W praktyce dysponujemy skończoną liczbą obserwacji, a zatem musimy stosować jedynie przybliżenia dla IF

Filtr Baxtera-Kinga

Baxter i King (1999) zaproponowali estymator filtru idealnego dla skończonej liczby obserwacji:

$$x_t = \sum_{j=-n}^n \theta_j y_{t-j} = \theta(L)y_t$$

gdzie n jest ustalane egzogenicznie (sugeroana wartość wynosi 3 lata).

Wartości parametrów θ_j oblicza się poprzez minimalizację wyrażenia:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi(\omega) - \Theta(\omega)|^2 d\omega$$

przy założeniu symetryczności oraz warunku $\sum_{j=-n}^n \theta_j = 0$.

Interpretacją powyższego wyrażenia jest średni dystans między funkcją odpowiedzi częstotliwościowej idealnego filtru $\Psi(\omega)$ oraz filtru BK $\Theta(\omega)$.

Rozwiązaniem są wagi:

$$\theta_j = \psi_j - \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^n \psi_i$$

gdzie ψ_j są wagami filtru idealnego.

Filtr Christiano-Fitzgeralda

Christiano i Fitzgerald (2003) zaproponowali **asymetryczny** filtr, który umożliwia obliczenie wszystkich obserwacji dla „przefiltrowanej” zmiennej postaci:

$$x_t = \sum_{j=t-T}^{t-1} \phi_{j,t} y_{t-j} = \phi_t(L)y_t \text{ dla } t = 1, 2, \dots, T$$

Wartości parametrów $\phi_{j,t}$ oblicza się poprzez minimalizację wyrażenia:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi(\omega) - \Phi_t(\omega)|^2 f_y(\omega) d\omega$$

przy warunku $\sum_{j=-(T-t)}^{t-1} \phi_{j,t} = 0$.

W powyższym wyrażeniu minimalizowana jest **średnia ważona dystansu** między funkcjami odpowiedzi częstotliwościowej idealnego filtru $\Psi(\omega)$ oraz filtru CF $\Phi_t(\omega)$, gdzie wagi te są dane przez widmo zmiennej y_t .

Dla procesu błędzenia losowego wagi wynoszą:

$$\phi_{j,t} = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi_0 - \sum_{i=0}^{T-t-1} \psi_i & \text{dla } j = t - T \\ \psi_j & \text{dla } j = t - T + 1, t - T + 2, \dots, t - 1 \\ \frac{1}{2}\psi_0 - \sum_{i=0}^{t-2} \psi_i & \text{dla } j = t - 1, \end{cases}$$

gdzie wartości ψ_i są wagami filtru idealnego. **Uwaga:** CF sugerują, aby przed przystąpieniem do filtracji usunąć trend deterministyczny.

Filtr Hodricka-Prescotta

HP - najczęściej stosowany filtr umożliwiający dekompozycję zmiennej y_t na część związaną z długookresowym trendem \bar{y}_t oraz składnik cykliczny x_t : $y_t = \bar{y}_t + x_t$

Dekompozycji dokonuje się poprzez minimalizację wyrażenia:

$$\sum_{t=1}^T [(x_t)^2 + \lambda[(\bar{y}_{t+1} - \bar{y}_t) - (\bar{y}_t - \bar{y}_{t-1})]^2]$$

gdzie parametr λ określa relatywną wagę dla wariancji x_t oraz przyrostów \bar{y}_t . Standardowa wartość dla danych kwartalnych wynosi $\lambda = 1600$, zaś dla danych o innej częstotliwości:

$$\lambda_\tau = (\tau/4)^4 * 1600$$

Przykładowo, dla danych miesięcznych ($\tau = 12$): $\lambda_{12} = (3^4) \times 1600 = 129600$

Dla danych rocznych: $\lambda_1 = (1/4)^4 \times 1600 = 6,25$.

Funkcja odpowiedzi częstotliwościowe dla filtru HP dla składnika cyklicznego jest postaci:

$$\Gamma(\omega) = \frac{\lambda(1 - e^{i\omega})^2(1 - e^{-i\omega})^2}{1 + \lambda(1 - e^{i\omega})^2(1 - e^{-i\omega})^2}$$

Ponieważ $\Gamma(0) = 0$; $\Gamma(\omega)$ jest funkcją rosnącą dla $\omega \in [0, \pi/2]$ oraz istnieje pewna wartość $\bar{\omega}$ taka, że dla $\omega \in [\bar{\omega}, \pi/2]$ wartość funkcji transferowej jest bliska jedności. Z tego względu filtr HP jest filtrem **górnoprzepustowym**.

Przykład - analiza składowych cyklicznych w Polsce

Korelacje składowych cyklicznych dla komponentów PKB

	Y	C	G	I
Y	1.00	0.61	0.28	0.86
C	0.61	1.00	0.47	0.51
G	0.28	0.47	1.00	0.29
I	0.86	0.51	0.29	1.00

Odchylenie standardowe składowych cyklicznych

	Y	C	G	I
	1.43	1.29	1.05	8.22

Przykład - analiza składowych cyklicznych w Polsce

Autokorelacja składowych cyklicznych

k	Y	C	G	I
0	1.00	1.00	1.00	1.00
1	0.69	0.39	0.56	0.89
2	0.52	0.31	0.30	0.74
3	0.38	0.20	0.13	0.54
4	0.21	0.16	-0.04	0.32
5	0.05	0.10	0.00	0.13
6	-0.02	0.05	-0.02	-0.02
7	-0.08	0.03	-0.03	-0.15
8	-0.12	-0.01	0.05	-0.26

Przykład - analiza składowych cyklicznych w Polsce

