Rozdział I. Wprowadzenie

MODELOWANIE POLSKIEJ GOSPODARKI z R

Proces stochastyczny a szereg czasowy

Proces stochastyczny

Proces stochastyczny $\{Y_t\}$ w czasie dyskretnym stanowi ciąg zmiennych losowych, które są uszeregowane względem obserwacji w czasie, oznaczanych indeksem t.

Szereg czasowy

Szereg czasowy $\{y_t : t = 1, 2, \ldots, T\}$ stanowi pojedynczą realizację procesu stochastycznego

Momenty

Niech $f_t : \Re \to \Re$ oznacza funkcję gęstości rozkładu brzegowego dla Y_t.

Moment zwykły rzędu l

$$\mu_t^{(l)} = E\{(Y_t)^l\} = \int_{-\infty}^{\infty} u^l f_t(u) du$$

Moment centralny rzędu l

$$\sigma_t^{(l)} = E\{(Y_t - \mu_t^{(1)})^l\} = \int_{-\infty}^{\infty} (u - \mu_t^{(1)})^l f_t(u) du.$$

Nazewnictwo

- Wartość oczekiwana: pierwszy moment zwykły
- Wariancja: drugi moment centralny
- Skośność: trzeci moment centralny
- Kurtoza: czwarty moment centralny

Statystyki opisowe szeregu czasowego

Średnia $\bar{y} = \hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$

Wariancja w próbie: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2$

Odchylenie standardowe: $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$

Standaryzowana skośność w próbie: $S = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{y_t-\bar{y}}{\hat{\sigma}}\right)^3$

Standaryzowana kurtoza w próbie: $K = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{y_t-\bar{y}}{\hat{\sigma}}\right)^4$

Autokowariancja

Autokowariancja określa wartość kowariancji między procesem stochastycznym a tym samym procesem przesuniętym o pewien odcinek czasu.

Wartość autokowaraincji dla zmiennych Y_t oraz Y_{t-s}:

$$\gamma_{t,s} = Cov(Y_t, Y_{t-s}) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_{t-s} - \mu_{t-s})]$$

Autokorelacja: znormalizowana wartość autokowariancji:

$$\rho_{t,s} = \frac{\gamma_{t,s}}{\sigma_t \times \sigma_{t-s}}$$

Autokorelacja cząstkowa ($\rho_{t,ss}$) określa zależność między zmiennymi Y_t i Y_{t-s} przy usunięciu wpływu pośrednich obserwacji $Y_{t-1}, \ldots, Y_{t-s+1}$ na obydwie zmienne.

Autokowariancja w próbie

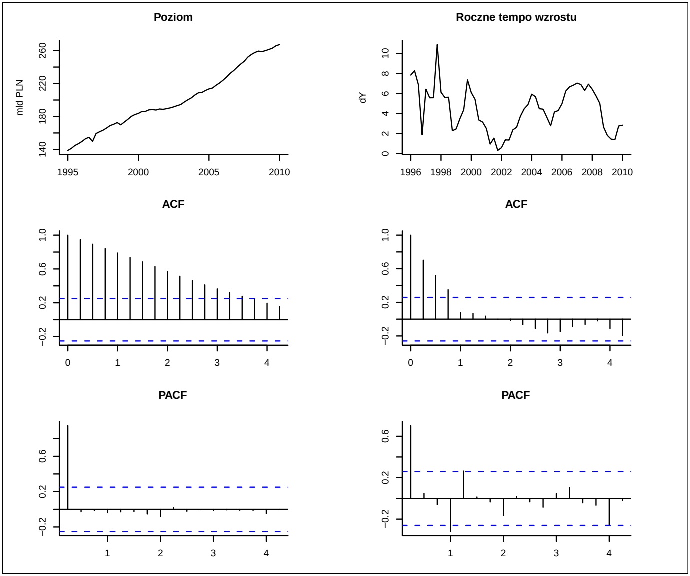
Autokowariancja w próbie:

$$\hat{\gamma}_s = \frac{1}{T} \sum_{t=s+1}^{T} (y_t - \bar{y})(y_{t-s} - \bar{y})$$

Autokorelacja w próbie:

$$\hat{\rho}_s = \frac{\hat{\gamma}_s}{\hat{\gamma}_0}$$

Przykład: dane dla polskiego PKB



Kapitalizacja odsetek i stopy zwrotu

Prosta stopa procentowa:[1] $Y_{t+k} = Y_t \times \prod_{i=0}^{k-1}(1 + R_{t+i})$

m-**krotna kapitalizacja odsetek:** $Y_{t+1} = Y_t \times \left(1 + \frac{R_{m,t}}{m}\right)^m$

Powiązanie między stopami: $R_t = \left(1 + \frac{R_{m,t}}{m}\right)^m - 1$

Stopa o ciągłej kapitalizacj R^*: $R_t = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{R_{m,t}}{m}\right)^m - 1 = e^{R_t^*} - 1$

Powiązanie między stopami: $R_t^* = \ln(1 + R_t)$

Kapitalizacja odsetek i stopy zwrotu

Wartość depozytu dla stóp o ciągłej kapitalizacji:

$$Y_{t+k} = Y_t \times \prod_{i=0}^{k-1} e^{R^*_{t+i}} = Y_t \times \exp\left(\sum_{i=0}^{k-1} R^*_{t+i}\right)$$

Sumowalność stóp o ciągłej kapitalizacji

$$R^*_{t,t+k} = \sum_{i=0}^{k-1} R^*_{t+i,t+i+1}$$

Wartość depozytu 1000PLN po roku dla R=10% i różnych wartości m

	m = 1	m = 2	m = 4	m = 12	m = Inf
wartosc depozytu	1100	1102.5	1103.81	1104.71	1105.17

Kapitalizacja odsetek i stopy zwrotu

Operacją odwrotną do liczenia wartości depozytu mając daną stopę procentową, jest liczenie stopy procentowej przy danych dotyczących wartości depozytu.

Prosta stopa procentowa

$$R_t = \frac{Y_{t+1}}{Y_t} - 1$$

Stopa o ciągłej kapitalizacji - także logarytmiczna stopa zwrotu

$$R_t^* = \ln \frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \Delta \ln Y_{t+1}$$

Ze względu na pożądane właściwości logarytmicznej stopy zwrotu, takie jak addytywności i symetryczność, jest ona bardzo często wykorzystywana w modelowaniu ekonomicznych i finansowych szeregów czasowych