Rozdział 11. Modele równowagi na rynku kapitałowym

MODELOWANIE POLSKIEJ GOSPODARKI z R

Wprowadzenie

Przy budowie portfela inwestycyjnego ważna jest analiza zależności między oczekiwaną stopą zwrotu i ryzykiem

Dwa najbardziej popularne modele umożliwiające wycenę ryzyka dowolnej inwestycji:

- model równowagi na rynku kapitałowym (CAPM)
- teoria arbitrażu cenowego (APT)

Modele te przyjmują, że stopy zwrotu dla akcji są generowane przez:

- model jednoczynnikowy (CAPM)
- model wieloczynnikowy (APT)

Model jednoczynnikowy

- Liczba parametrów modelu Markowitza dla N akcji: N dla wektora oczekiwanych stóp zwrotu μ oraz $(N+1)N/2$ dla macierzy kowariancji Σ
- Dla $N = 100$ liczba parametrów wynosi 5150
- Zazwyczaj w portfelach funduszy inwestycyjnych znajduje się 200-300 walorów
- Opracowanie prognozy eksperckiej dla tak wielkiej liczby współczynników korelacji w sposób bezpośredni jest bardzo trudne, a wręcz niemożliwe.
- Model jednoczynnikowy, zaproponowany w artykule Sharpe'a (1963), umożliwia ograniczenie wymiaru powyższego problemu

Model jednoczynnikowy: założenia

1. Zależność między stopą zwrotu r_i dla i-tej akcji oraz tempem wzrostu indeksu giełdowego r_m jest liniowa:

$$\begin{aligned} r_i &= \alpha_i + \beta_i r_m + \epsilon_i \\ \epsilon_i &\sim N(0, \sigma^2_{\epsilon,i}) \\ cov(r_m, \epsilon_i) &= 0 \end{aligned}$$

2. Jedynym źródłem korelacji między stopami zwrotu dla akcji jest ich wspólna reakcja na ogólną sytuację rynkową

$$cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0 \text{ dla } i \neq j$$

Model jednoczynnikowy: implikacje

1. Oczekiwana stopa zwrotu z inwestycji w akcję i wynosi:

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_m$$

   i składa się z części niezależnej (parametr alfa) oraz zależnej (parametr beta) od ogólnej sytuacji na rynku

2. Wariancja z inwestycji w akcję i wynosi::

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon,i}^2$$

   i składa się z ryzyka rynkowego i swoistego.

3. Kowariancja między stopami zwrotu zależy jedynie ze wspólnej reakcji na ogólną sytuację rynkową:

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2.$$

Model jednoczynnikowy: postać wektorowa

Model jednoczynnikowy w postaci wektorowej:

$$r = \alpha + \beta r_m + \epsilon$$

Oczekiwane stopy zwrotu oraz macierz kowariancji:

$$\begin{aligned} \mu &= \alpha + \beta \mu_m \\ \Sigma &= \beta \beta' \sigma_m^2 + \Sigma_\epsilon \end{aligned}$$

Liczba parametrów niezbędna do obliczenia μ oraz Σ: po N parametrów dla wektorów α i β oraz macierzy Σ_ϵ (macierz diagonalna). W sumie $3N$ parametrów. Dla $N = 100$ spadek liczby parametrów dla których należy dokonać prognozy z 5150 do 300.

Model jednoczynnikowy: dywersyfikacja ryzyka

Dla portfela o stopie zwrotu $r_p = w'r$, gdzie $w = \iota/N$ zachodzi:

$$\mu_p = w'\alpha + w'\beta\mu_m = \alpha_p + \beta_p\mu_m$$
$$\sigma_p^2 = w'\beta\beta' w\sigma_m^2 + w'\Sigma_\epsilon w = \beta_p^2\sigma_m^2 + w'\Sigma_\epsilon w.$$

Dla dobrze zdywersyfikowanego portfela:

$$\lim_{N\to\infty} w'\Sigma_\epsilon w = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2}\iota'\Sigma_\epsilon\iota = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\overline{\sigma}_\epsilon^2 = 0$$

gdzie $\overline{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \sigma_{\epsilon,i}^2$. Oznacza to, że ryzyko swoiste (niesystematyczne) można zdywersyfikować. W efekcie, jeżeli zachodzi zależność między ryzykiem i oczekiwaną stopą zwrotu, to rynek powinien wyceniać jedynie ryzyko rynkowe (systematyczne).

Model jednoczynnikowy - przykład do 50 akcji GPW

	alfa	beta	Sei	R2
ALMA	1.310	1.071	13.17	0.249
AWBUD	-0.230	0.986	14.96	0.179
BORYS	2.151	1.378	15.00	0.297
BOS	-0.181	0.319	6.77	0.100
BYTOM	0.824	0.872	18.24	0.103
CERSA	0.717	0.894	9.48	0.308
DEBIC	0.178	0.814	8.58	0.311
....				
Min.	-2.601	0.276	5.57	0.019
Mediana	0.130	0.886	13.46	0.207
Srednia	0.197	0.910	13.35	0.213
Max.	2.151	1.549	26.89	0.509

Dywersyfikacja ryzyka niesystematycznego - przykład c.d.

Dywersyfikacja ryzyka niesystematycznego jest utrudniona, gdy macierz kowariancji Σ_ϵ nie jest diagonalna ponieważ:

$$w'\Sigma_\epsilon w \neq \frac{1}{N}\overline{\sigma}^2_\epsilon$$

Powyższe wyrażenia dla naszego przypadku wynoszą:

```
Wartosc wSig2w.diag:  3.92
Wartosc wSig2w:      19.5
```

Założenia modelu CAPM

Model równowagi rynku kapitałowego (capital asset pricing model, CAPM), niezależnie zaproponowany w pracach Sharpe'a(1964), Lintenera (1965) oraz Mossina (1966), opiera się na następujących założeniach:

1. Wszyscy inwestorzy są racjonalni oraz charakteryzują się awersją do ryzyka
2. Wszyscy uczestnicy rynku mają jednakowy oraz pełny dostęp do informacji oraz posiadają nieograniczony dostęp do stopy wolnej od ryzyka
3. Wszyscy inwestorzy są biorcami cen, zaś ich decyzje nie mają wpływu na ceny akcji.
4. Nie ma kosztów transakcji oraz podatków, zaś wszystkie aktywa są doskonale podzielne.
5. Oczekiwania inwestorów co do przyszłych stóp zwrotu oraz ryzyka są identyczne.
6. Jedynym źródłem korelacji między stopami zwrotu dla różnych akcji jest wspólna reakcja na ogólną sytuację rynkową

Portfel rynkowy w modelu CAPM

- Inwestorzy mają identyczne oczekiwania zatem identyczne postrzeganie granicy efektywnej (linia rynku kapitałowego)
- Zatem, każdy portfel inwestycyjny jest średnią ważoną portfela stycznego oraz instrumentu wolnego od ryzyka
- Ponieważ wszyscy inwestorzy posiadają identyczny portfel ryzykownych aktywów, to w warunkach równowagi musi on być portfelem rynkowym, tak aby popyt na akcje był równy ich podaży
- Zatem, portfel styczny jest portfelem rynkowym (zmiany jego cen mogą być mierzone przez rozległy indeks giełdowy)

Cena ryzyka w modelu CAPM

- Ponieważ portfel rynkowy to portfel styczny, zatem CML dana przez:

$$\mu_p = r_f + \frac{\mu_m - r_f}{\sigma_m}\sigma_p$$

gdzie μ_p oraz σ_p to oczekiwana stopa zwrotu oraz ryzyko dowolnego portfela znajdującego się na granicy efektywnej.

- Wiemy, że dla dobrze zdywersyfikowanego portfela:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2\sigma_m^2$$

- Połączenie powyższych zależności wskazuje, że oczekiwana stopa zwrotu dobrze zdywersyfikowanego portfela efektywnego jest liniową funkcją parametru beta dla tego portfela:

$$\mu_p = r_f + \beta_p(\mu_m - r_f)$$

- Powyższa zależność, uogólniona dla wszystkich aktywów:

$$\mu_i = r_f + \beta_i(\mu_m - r_f)$$

określa się jako linia rynku papierów wartościowych (security market line, SML)

Testy modelu CAPM

Testy empiryczne modelu CAPM polegają na zazwyczaj na analizie następujących pytań:

- zależność między oczekiwaną stopą zwrotu oraz parametrem beta jest dodatnia oraz liniowa;
- nachylenie SML wynosi $\mu_m - r_f$;
- oczekiwana stopa zwrotu dla aktywów o zerowym parametrze beta wynosi r_f;
- rynkowa wartość ryzyka niesystematycznego jest zerowa.

Problemem w testach CAPM jest fakt, że wartości dla μ_i, β_i oraz μ_m nie są zmiennymi obserwowalnymi. Zatem testy modelu CAPM zazwyczaj są łącznym testem trzech hipotez:

1. model jednoczynnikowy jest prawdziwy w każdym okresie;
2. model CAPM jest prawdziwy w każdym okresie;
3. parametry beta są stabilne w czasie.

Testy modelu CAPM

- Model jednoczynnikowy w okresie t:

$$\begin{aligned} r_{it} =& \alpha_i + \beta_i r_{mt} + \epsilon_{it} \\ \mu_{it} =& \alpha_i + \beta_i \mu_{mt} \\ r_{it} =& \mu_{it} + \beta_i (r_{mt} - \mu_{mt}) + \epsilon_{it} \end{aligned}$$

- Model CAPM w okresie t:

$$\mu_{it} = r_{ft} + \beta_i (\mu_{mt} - r_{ft})$$

- Połączenie powyższych zależności:

$$r_{it} - r_{ft} = \beta_i (r_{mt} - r_{ft}) + \epsilon_{it}$$

Prosty test modelu CAPM

Etap 1: Dla każdego i oszacować parametry regresji:

$$r_{it} - r_{ft} = \beta_i (r_{mt} - r_{ft}) + \epsilon_{it}$$

Etap 2: Estymacja parametrów regresji:

$$\overline{r}_i - \overline{r}_f = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{\beta}_i + \gamma_2 \hat{\sigma}^2_{\epsilon,i} + \eta_i,$$

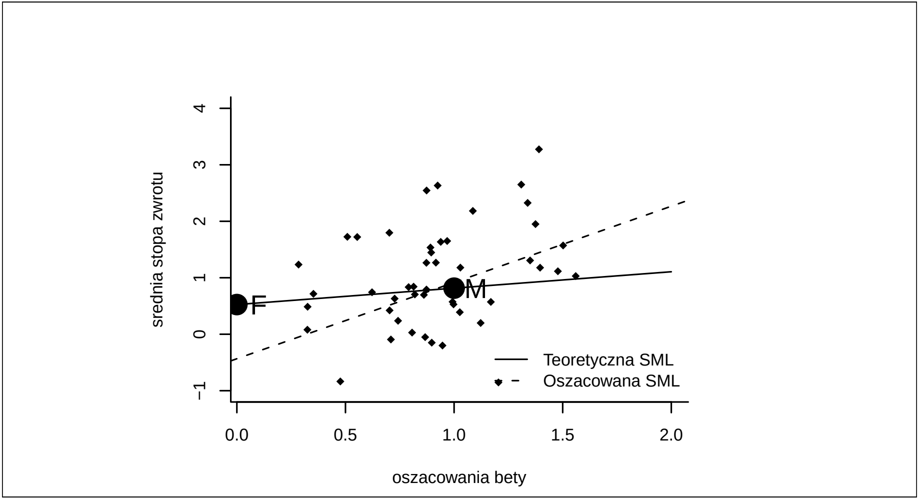
Weryfikacja hipotez:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 0 \\
\gamma_1 &= \overline{r}_m - \overline{r}_f \\
\gamma_2 &= 0,
\end{aligned}$$

Prosty test modelu CAPM - przykład cd.

```
Etap 1:
         beta   Sei     R2
ALMA    1.086 13.17 0.2563
..........................
ZYWIE   0.284  5.56 0.1165

Etap 2:
            Wartosc  Std. err.   t_stud. Pr(>|t|)
 gamma_0     -0.434      0.406    -1.07   0.290
 gamma_1      1.350      0.420     3.21   0.002 **
 gamma_2     -0.002      0.001    -1.92   0.061 .

Multiple R-squared: 0.198, Adjusted R-squared: 0.163

Weryfikacja H0:

gamma0  = 0; gamma1  = 0.29; gamma2  = 0
F(47,3)=3.14* (prob = 0.034)
```

SML dla akcji notowanych na GPW



Stabilność parametru beta

- Możliwości arbitrażu (np. inwestycja w portfel o zerowej becie i oczekiwanej stopie zwrotu wyższej od stopy wolnej od ryzyka) są ograniczone, m.in. ze względu na zmienność parametru beta
- Blume (1975) pierwszy pokazał, że oszacowania parametrów beta są niestabilne w czasie: tendencja oszacowań parametrów beta do powracania do neutralnej wartości 1
- Test Blume'a polega na podziale próby na dwa okresy i oszacowanie parametrów modelu:

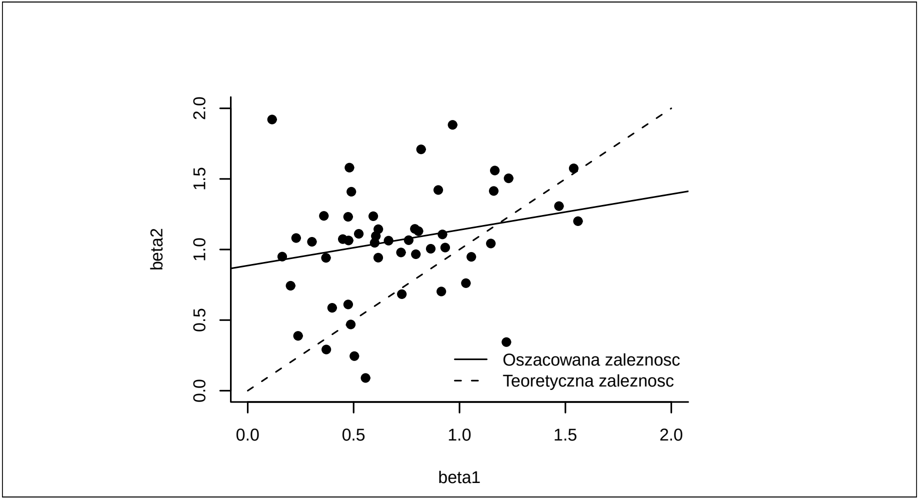
$$\hat{\beta}_{1i} = \psi_0 + \psi_1 \hat{\beta}_{2i} + \varepsilon_i$$

gdzie $\hat{\beta}_{1i}$ oraz $\hat{\beta}_{2i}$ są oszacowaniami parametru beta uzyskane na podstawie dwóch podprób.

Stabilność parametru beta - przykład cd.

```
        beta1    beta2
ALMA    1.148    1.043
AWBUD   1.056    0.948
BORYS   1.232    1.504
BOS     0.371    0.292
BYTOM   0.605    1.096
.....................

           Wartosc  Std. err.   t_stud. Pr(>|t|)
 psi_0       0.886      0.135     6.56   0.000 ***
 psi_1       0.253      0.171     1.48   0.15
---
Multiple R-squared: 0.0437, Adjusted R-squared: 0.0237

Weryfikacja H0: psi_0 = 0 oraz psi_1 = 1

F(48,2)=27.2*** (prob = 0.000)
```

Zależność między oszacowaniami parametru beta



Test Sharpe'a-Coopera (1972) modelu CAPM

- Test polega na sprawdzeniu, czy inwestując w akcje o wysokim współczynniku beta możemy uzyskać wyższą stopę zwrotu niż inwestując w akcje o niskim współczynniku beta
- Autorzy stworzyli 10 portfeli uszeregowanych według decyli parametru beta i badali, czy w okresie 1931-1967 oczekiwana stopa zwrotu dla tych portfeli była dodatnio skorelowana z wartościami ich parametrów beta (zmiana struktury portfeli dokonywana raz na rok, oszacowania bet na podstawie danych z ostatnich 60 miesięcy)
- Autorzy wskazują, że odpowiedź na postawione pytanie brzmi TAK
- Sprawdźmy, czy wyniki te są potwierdzone dla danych polskich z okresu 2006-2010

Test Sharpe'a-Coopera - przykład cd.

	beta1	2006	2007	2008	2009	2010	2006-2010
portfel 1	0.308	8.11	0.160	-2.57	0.846	0.411	1.3929
portfel 2	0.548	7.52	-0.523	-8.33	1.375	0.511	0.1110
portfel 3	0.734	4.62	1.883	-5.09	5.285	-1.740	0.9926
portfel 4	0.798	6.64	0.756	-8.06	3.240	0.438	0.6031
portfel 5	0.882	7.08	1.235	-11.61	2.503	1.191	0.0794
portfel 6	0.975	9.46	1.151	-8.86	0.479	0.245	0.4956
portfel 7	1.077	8.34	1.921	-9.43	3.382	-0.427	0.7573
portfel 8	1.180	7.54	0.383	-10.01	4.127	1.651	0.7397
portfel 9	1.375	7.02	0.684	-9.22	8.107	5.376	2.3926
portfel 10	1.755	3.06	-1.989	-12.36	5.201	-0.925	-1.4024

Oszacowanie parametrow regresji srednich stop zwrotu w latach 2006-2010 wzgledem parametru beta dla 10 portfeli:

	Wartosc	Std. err.	t_stud.	Pr(>|t|)
stala	1.344	0.821	1.64	0.14
beta	-0.755	0.789	-0.96	0.37

Teoria arbitrażu cenowego

- Wiele rozszerzeń modelu CAPM (polegających na usunięciu kolejnych założeń modelu CAPM), z których największą popularnością cieszy się teoria arbitrażu cenowego (arbitrage pricing theory, APT), zaproponowana przez Rossa (1976)
- Podstawową różnicą między modelami CAPM i APT jest określenie źródeł ryzyka: medel jedno- vs. wieloczynnikowy
- Założenia modelu APT takie jak modelu CAPM, z wyjątkiem modelu dla stóp zwrotu (dalej nadzwyczajnych stóp zwrotu $y_i = r_i - r_f$):

$$
\begin{aligned}
y_i =& \alpha_i + \beta_{i1} f_1 + \beta_{i2} f_2 + \ldots + \beta_{iK} f_K + \epsilon_i \\
\epsilon_i \sim& N(0, \sigma^2_{\epsilon,i}) \\
cov(f_k, \epsilon_i) =& 0 \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, K \\
cov(\epsilon_i, \epsilon_j) =& 0 \text{ dla } i \neq j,
\end{aligned}
$$

gdzie K jest liczbą czynników f_k odpowiedzialnych za wspólną zmienność akcji, zaś parametry β_{ik} są określane jako ładunki

Dobór czynników w modelu APT

- Dwa podejścia przy doborze czynników: teoretyczne oraz statystyczne
- Podejście teoretyczne: odgórne wyznaczenie zbioru zmiennych makroekonomicznych i finansowych mających wpływ na kształtowanie się kursów akcji (Sokalska, 1996, dla Polski oraz Chen, Roll i Ross, 1986 dla rynku amerykańskiego)
- Podejście statystyczne: analiza czynnikowa lub metoda głównych składowych, gdzie oszacowania β_{ik} uzyskuje się na podstawie $\Sigma = cov(y)$ (Rubaszek, 2002 dla Polski oraz Roll i Ross, 1980 dla rynku amerykańskiego).
- Nie wiadomo, która z metod lepsza: analiza czynnikowa czy metoda głównych składowych.

Metoda głównych składowych

Niech dany będzie model wieloczynnikowy zapisany w postaci macierzowej:

$$y = \alpha + \beta f + \epsilon,$$

gdzie $y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_N]'$, $\beta = [\beta_{ik}]_{N\times K}$ oraz $f = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_K]'$. Załóżmy, że czynniki są niezależne, tj.: $cov(f) = I_K$. Wariancja stóp zwrotu wynosi:

$$\Sigma = \beta\beta' + \Sigma_\epsilon,$$

gdzie Σ_ϵ jest diagonalną macierzą zawierającą $\sigma^2_{\epsilon,i}$ na przekątnej.

Metoda głównych składowych polega na wyznaczeniu takich wartości macierzy β, aby wyrażenie $\beta\beta'$ w jak największym stopniu odzwierciedlało wartość macierzy korelacji Σ.

Metoda głównych składowych

Problem optymalizacyjny dla pierwszej składowej:

$$\max_{\beta_1} var(x_1)$$

p.w.

$$x_1 = \beta_1' y; \beta_1' \beta_1 = 1$$

Problem optymalizacyjny dla drugiej składowej:

$$\max_{\beta_2} var(x_2)$$

p.w.

$$x_2 = \beta_2' y; cov(x_2, x_1) = 0; \beta_2' \beta_2 = 1$$

...

Rozwiązaniem są kolejne wektory własne macierzy $\Sigma = cov(y)$

Metoda głównych składowych

- Dekompozycja spektralna macierzy kowariancji Σ:

$$\Sigma = V\Lambda V',$$

gdzie Λ macierz diagonalna z wartościami własnymi, V macierz wektorów własnych.

- Suma wartości własnych macierzy Σ spełnia:

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k,$$

gdzie $\sigma_i^2 = var(y_i)$.

- Część sumy wariancji wyjaśniona przez k-tą składową wynosi:

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N}.$$

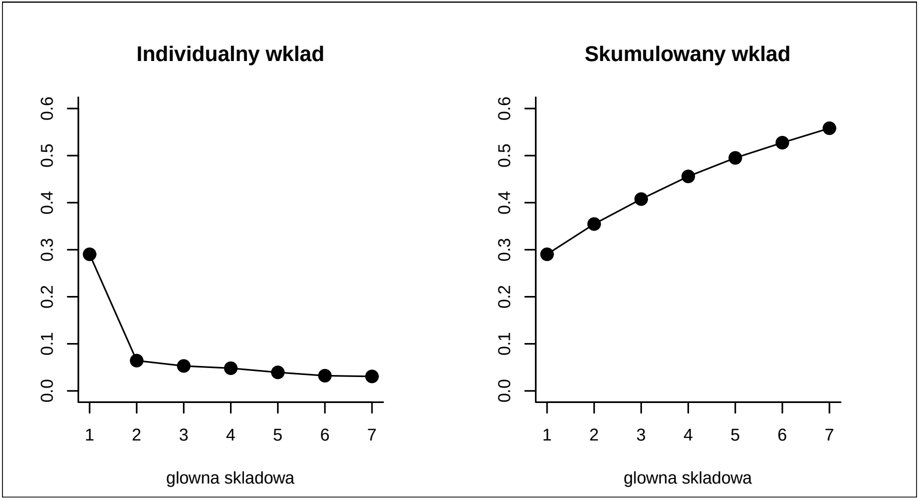
- Estymator MNW dla czynników wspólnych (Bartlett, 1937):

$$f = (\beta'\Sigma^{-1}\beta)^{-1}\beta'\Sigma^{-1}(y - \overline{y}).$$

Metoda głównych składowych - przykład c.d.

```
Wklad do wariancji stop zwrotu akcji notowannych na GPW

Skladowa                   1     2     3     4     5     6     7
----------------------------------------------------------------
Indywidualny wklad: 0.290 0.064 0.053 0.048 0.039 0.032 0.031
Skumulowany wklad:  0.290 0.355 0.408 0.456 0.495 0.527 0.558

Wartosc macierzy ladunkow:

        Comp.1   Comp.2   Comp.3
ALMA   -0.1477  0.03410  0.03211
AWBUD  -0.1390 -0.09495  0.10664
.................................
YAWAL  -0.1919  0.09527  0.04332
ZYWIE  -0.0121 -0.00445  0.00336
```

Wkład kolejnych składowych do objaśniania wariancji stóp zwrotu



Wycena ryzyka w modelu APT

Wariancja stopy zwrotu portfela inwestycyjnego:

$$y_p = w'\alpha + \beta_p f + w'\epsilon,$$

gdzie $\beta_p = w'\beta$, wynosi

$$\sigma_p^2 = \beta_p \beta_p' + w'\Sigma_\epsilon w.$$

Dla dobrze zdywersyfikowanych portfeli wyrażenie $w'\Sigma_\epsilon w$ dąży do zera, a zatem rynek nie powinien wyceniać ryzyka swoistego. Rynkową cenę ma jedynie ryzyko związane z kolejnymi czynnikami f_k.

Cena ryzyka związanego z kolejnymi czynnikami jest liczona na podstawie K portfeli arbitrażowych (arbitrage portfolio), które są zależne jedynie od jednego czynnika z ładunkiem 1. Oznaczając przez w_k wagi k-tego portfela arbitrażowego oraz przez $W = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_K]$, oznacza to że:

$$W'\beta = I_K,$$

Przykład macierzy wag:

$$W = \beta(\beta'\beta)^{-1}.$$

Wycena ryzyka w modelu APT

Wzór na nadzwyczajną stopę zwrotu dla k-tego portfela arbitrażowego:

$$y_{pk} = w_k' \alpha + f_k + w_k' \epsilon.$$

Wyrażenie:

$$E(y_{pk}) = \lambda_k = w_k' \alpha.$$

określa premię za ryzyko związane z k-tym czynnikiem. Przy braku możliwości dokonania arbitrażu na rynku kapitałowym, wartości oczekiwanych stóp zwrotu inwestycji w dowolną akcję powinny wynosić:

$$\mu_i = r_f + \lambda_1 \beta_{i1} + \lambda_2 \beta_{i2} + \ldots + \lambda_K \beta_{iK}.$$

Wycena ryzyka w modelu APT -przykład c.d.

```
Wartosci parametru lambda:

portfel 1    portfel 2     portfel 3
    -3.29        -1.35          2.30
```

Oszacowania regresji:

$$\bar{r}_i = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{\beta}_{i1} + \gamma_2 \hat{\beta}_{i2} + \ldots + \gamma_K \hat{\beta}_{iK} + \eta_i$$

```
             Wartosc  Std. err.   t_stud.  Pr(>|t|)
gamma_0        0.492      0.376      1.31     0.197
gamma_1       -3.513      2.649     -1.33     0.191
gamma_2       -1.331      0.940     -1.42     0.163
gamma_3        2.295      0.911      2.52     0.015 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Multiple R-squared: 0.197, Adjusted R-squared: 0.145
F-statistic: 3.76 on 3 and 46 DF,  p-value: 0.0170
```

Wycena ryzyka w modelu APT -przykład c.d.

Sprawdźmy, czy ryzyko swoiste jest wyceniane na GPW. Wyniki regresji:

$$\bar{r}_i = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{\beta}_{i1} + \gamma_2 \hat{\beta}_{i2} + \ldots + \gamma_K \hat{\beta}_{iK} + \delta \hat{\sigma}^2_{\epsilon,i} + \eta_i,$$

gdzie $\hat{\sigma}^2_{\epsilon,i}$ jest estymatorem wariancji ϵ_i

```
               Wartosc  Std. err.   t_stud.  Pr(>|t|)
gamma_0          0.747      0.394      1.90     0.064 .
gamma_1         -6.307      3.025     -2.09     0.043 *
gamma_2         -0.679      0.988     -0.69     0.496
gamma_3          2.111      0.897      2.35     0.023 *
gamma_4         -0.004      0.002     -1.79     0.081 .
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Multiple R-squared: 0.25, Adjusted R-squared: 0.183
F-statistic: 3.75 on 4 and 45 DF,  p-value: 0.0102
```