Rozdział 10: Portfel inwestycyjny

MODELOWANIE POLSKIEJ GOSPODARKI z R

Wprowadzenie

Wkład Markowitza, laureata nagrody Nobla z ekonomii w 1990 r., do teorii budowy portfela inwestycyjnego:

- Ujęcie charakterystyk portfeli w kategoriach oczekiwanej stopy zwrotu oraz ryzyka (mean-variance portfolio)
- Teoria konstrukcji optymalnych portfeli inwestycyjnych

Stopa zwrotu z inwestycji

Prosta stopy zwrotu z inwestycji w akcję i:

$$R_{it} = \frac{P_{it} - P_{i,t-1} + D_{it}}{P_{i,t-1}},$$

Wartość R_{it} składa się z dwóch elementów:

- zysk kapitałowy (capital gain) związany ze zmianą ceny akcji
- stopa dywidendy (dividend yield), związana z wypłatą dywidendy.

Logarytmiczna stopa zwrotu:

$$r_{it} = \ln(P_{it} + D_{it}) - \ln(P_{i,t-1}) = \ln(1 + R_{it})$$

Założenia modelu Markowitza

Rozkład logarytmicznych stóp zwrotu jest postaci (rozważania dla danego momentu w czasie):

$$\begin{aligned} r_i &= \mu_i + \epsilon_i \\ \epsilon_i &\sim N(0, \sigma_i^2) \\ Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) &= \sigma_{ij}. \end{aligned}$$

μ_i: oczekiwana stopa zwrotu

σ_i: ryzyko

Dla N akcji powyższe zależności można zapisać w skrócie jako:

$$r \sim N(\mu, \Sigma),$$

Założenia modelu Markowitza

Ponadto, w modelu Markowitza przyjmuje się, że:

- Inwestorzy są racjonalni oraz charakteryzują się awersją do ryzyka: dążą do uzyskania jak najwyższych stóp zwrotu przy jak najmniejszym ryzyku.
- Wszyscy mają jednakowy oraz pełny dostęp do informacji, tj. rynek jest efektywny w silnej formie (zob. Fama, 1970), oraz nieograniczony dostęp do stopy wolnej od ryzyka r_f, po której mogą pożyczać i deponować środki.
- Inwestorzy są biorcami cen, zaś ich decyzje nie mają wpływu na ceny akcji.
- Nie ma kosztów transakcji oraz podatków, zaś wszystkie aktywa są doskonale podzielne.

Portfel dla dwóch akcji

Rozważmy portfela składający się z dwóch akcji (A i B) dla których:

$$\begin{bmatrix} r_A \\ r_B \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_A \\ \mu_B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB} \\ \sigma_{AB} & \sigma_B^2 \end{bmatrix}\right)$$

Niech w_A oraz w_B oznaczają udziały aktywów A i B w portfelu, tj.

$$w_A + w_B = 1.$$

Portfel dla dwóch akcji

Stopa zwrotu z portfela:

$$r_p = w_A r_A + w_B r_B$$

ma rozkład:

$$r_p \sim N(\mu_p, \sigma_p^2),$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mu_p &= w_A \mu_A + w_B \mu_B \\ \sigma_p^2 &= w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2 w_A w_B \sigma_{AB} \end{aligned}$$

Portfel o minimalnym ryzyku

W celu uzyskania portfela o minimalnym ryzyku szukamy wartości w_A dla której wariancja portfela:

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + (1 - w_A)^2\sigma_B^2 + 2w_A(1 - w_A)\sigma_{AB}$$

jest najniższa. Pochodna:

$$\frac{d\sigma_p^2}{dw_A} = 2w_A\sigma_A^2 - 2(1 - w_A)\sigma_B^2 + 2(1 - 2w_A)\sigma_{AB}$$

jest równa zeru dla:

$$w_A^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}} \text{ oraz } w_B^* = \frac{\sigma_A^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}}$$

Przykład

Rozkład dla akcji A i B:

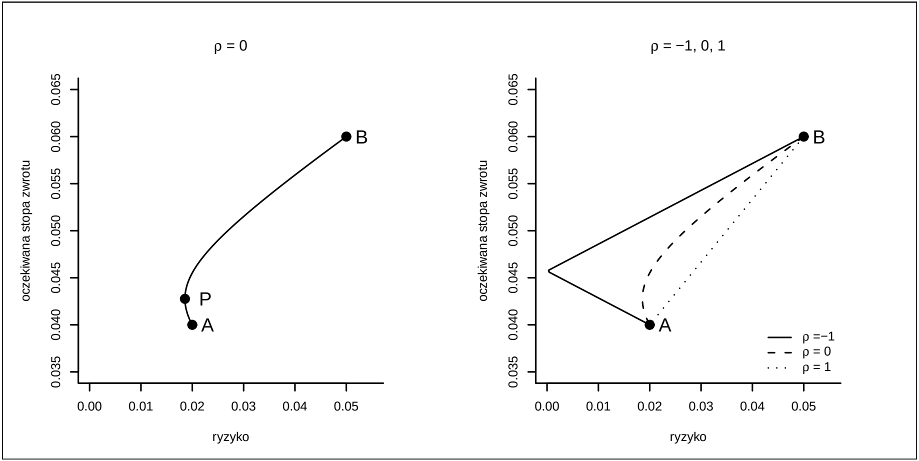
Parametr rozkładu	μ_A	μ_B	σ_A	σ_B	σ_{AB}	ρ_{AB}
Wartość	0,04	0,06	0,02	0,05	0,00	0,00

Zastosowanie powyższych wzorów prowadzi do uzyskania wag:

```
Wagi portfela
0.862   0.138

Charakterystyki portfela:
Oczekiwana stopa zwrotu: mu  = 0.0428
Ryzyko:                  sig = 0.0186
```

Przykład



ρ = 0
oczekiwana stopa zwrotu
0.035
0.040
0.045
0.050
0.055
0.060
0.065
B
P
A
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
ryzyko
ρ = −1, 0, 1
oczekiwana stopa zwrotu
0.035
0.040
0.045
0.050
0.055
0.060
0.065
B
A
ρ =−1
ρ = 0
ρ = 1
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
ryzyko

Portfel efektywny

O portfelu mówimy, że jest efektywny gdy:

1. Przy danym poziomie ryzyka nie istnieje inny portfel o wyższej oczekiwanej stopie zwrotu.
2. Przy danym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu nie istnieje inny portfel o niższym ryzyku.

Zbiór portfeli efektywnych określa się jako granica efektywna (efficient frontier)

Portfel z aktywem wolnym od ryzyka

Charakterystyki instrumentu wolnego od ryzyka (aktywo F):

$$
\begin{aligned}
E(r_f) &= \mu_f = r_f \\
Var(r_f) &= 0 \\
Cov(r_f, r_p) &= 0,
\end{aligned}
$$

gdzie $r_p \sim N(\mu_p, \sigma_p^2)$ jest stopą zwrotu z ryzykownego portfela, określanego dalej jako „aktywo P"

Portfel z aktywem wolnym od ryzyka

Rozważmy portfel składający się z aktywów F i P (portfel PF), gdzie w_p oznacza udział aktywa P w tym portfelu. Stopa zwrotu dla portfela PF:

$$r_{pf} = (1 - w_p) r_f + w_p r_p$$

ma rozkład $r_{pf} \sim N(\mu_{pf}, \sigma^2_{pf})$, gdzie:

$$\begin{aligned} \mu_{pf} &= (1 - w_p) r_f + w_p \mu_p \\ \sigma^2_{pf} &= w_p^2 \sigma_p^2. \end{aligned}$$

Zauważmy, że:

$$\mu_{pf} = r_f + w_p(\mu_p - r_f).$$

Wyrażenie $\mu_p - r_f$ określa oczekiwaną nadzwyczajną stopę zwrotu (expected excess return), zwaną także premią za ryzyko (risk premium), którego wartość wynosi σ_p.

Współczynnik Sharpe'a

Ryzyko inwestycji w portfel PF:

$$\sigma_{pf} = w_p \sigma_p.$$

Podstawiając do:

$$\mu_{pf} = r_f + w_p(\mu_p - r_f).$$

uzyskujemy:

$$\mu_{pf} = r_f + \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}\sigma_{pf},$$

Oczekiwana stopa zwrotu oraz ryzyko wszystkich możliwych portfeli inwestycyjnych stworzonych z aktywów F i P znajdują się na półprostej o początku w punkcie $(0, r_f)$ oraz nachyleniu $\frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}$. Nachylenie to jest określane jako współczynnik Sharpe'a (Sharpe ratio) aktywa P i mierzy jak wyceniana jest jednostka ryzyka inwestycji w to aktywo (zob. Sharpe, 1966)

Przykład c.d.

Parametr rozkładu	μ_A	μ_B	σ_A	σ_B	σ_{AB}	ρ_{AB}	r_f
Wartość	0,04	0,06	0,02	0,05	0,00	0,00	0,03

$$SR_i = \frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}$$

```
Wspolczynnik Sharpe'a
Akcja A:  SR = (0,04-0,03)/0,02 = 0,5
Akcja B:  SR = (0,06-0,03)/0,05 = 0,6
```

Efektywny portfel z aktywem wolnym od ryzyka

Aby wyznaczyć granicę efektywną w przypadku występowania aktywa F poszukiwany jest portfel składający się jedynie z ryzykownych aktywów o najwyższym współczynniku Sharpe'a. Dla dwóch aktywów ryzykownych problem jest następujący:

$$\max_{w_A, w_B} \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}$$

Podstawiając wartości oczekiwanej stopy zwrotu oraz wariancji dla portfela złożonego z akcji A i B oraz warunek sumy wag problem ten można zapisać jako:

$$\max_{w_A} \frac{w_A(\mu_A - r_f) + (1 - w_A)(\mu_B - r_f)}{(w_A^2\sigma_A^2 + (1 - w_A)^2\sigma_B^2 + 2w_A(1 - w_A)\sigma_{AB})^{1/2}}$$

Efektywny portfel z aktywem wolnym od ryzyka

Rozwiązaniem są wagi:

$$w_A^* = \frac{(\mu_A - r_f)\sigma_B^2 - (\mu_B - r_f)\sigma_{AB}}{(\mu_A - r_f)\sigma_B^2 + (\mu_B - r_f)\sigma_A^2 - (\mu_A + \mu_B - 2r_f)\sigma_{AB}}$$

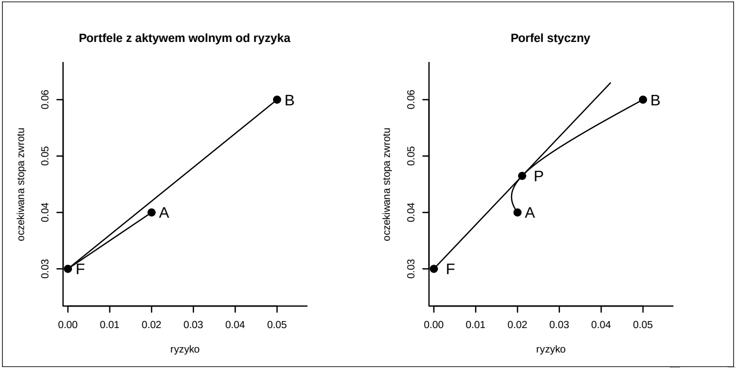
$$w_B^* = \frac{(\mu_B - r_f)\sigma_A^2 - (\mu_A - r_f)\sigma_{AB}}{(\mu_A - r_f)\sigma_B^2 + (\mu_B - r_f)\sigma_A^2 - (\mu_A + \mu_B - 2r_f)\sigma_{AB}}$$

Wagi te określają portfel styczny (tangency portfolio), dla którego $r_p \sim N(\mu_p, \sigma_p^2)$. Granica efektywna jest półprostą rozpoczynającej się w punkcie $(0, r_f)$ oraz przechodzącą przez punkt (μ_p, σ_p). Półprosta jest określana natomiast jako linia rynku kapitałowego (capital market line, CML)

Przykład c.d.

```
Wagi portfela stycznego
0.676    0.324

Oczekiwana stopa zwrotu: mu  = 0.0465
Ryzyko:                  sig = 0.0211
Wspolczynnik Sharpe'a:         0.781
```



Portfel dla N akcji

Rozważmy portfel dla N akcji o stopach zwrotu:

$$r \sim N(\mu, \Sigma).$$

Niech $w = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_N]'$ oznacza wektor wag, zaś $\iota_N = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]'$ wektor jedynek. Warunek sumy wag ma postać:

$$w'\iota = 1$$

Stopa zwrotu z portfela $r_p = w'r$, ma rozkład:

$$r_p \sim N(w'\mu, w'\Sigma w)$$

Portfel o minimalnym ryzyku

Problem optymalizacyjny:

$$\min_{w} \sigma_p^2 = w'\Sigma w$$

p.w.

$$w'\iota = 1$$

Lagrangean:

$$\mathcal{L} = w'\Sigma w + \lambda(w'\iota - 1),$$

Warunki pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w'} = 2\Sigma w + \lambda\iota = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = w'\iota - 1 = 0.$$

Portfel o minimalnym ryzyku

Warunki w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2\Sigma & \iota \\ \iota' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_N \\ 1 \end{bmatrix},$$

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} w \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Sigma & \iota \\ \iota' & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_N \\ 1 \end{bmatrix},$$

Portfel o minimalnym ryzyku i stopie zwrotu μ_0

Problem optymalizacyjny:

$$\min_{w} \sigma_p^2 = w'\Sigma w$$

p.w.

$$\begin{aligned} \mu_p = w'\mu &= \mu_0 \\ w'\iota &= 1. \end{aligned}$$

Lagrangean:

$$\mathcal{L} = w'\Sigma w + \lambda_1(w'\mu - \mu_0) + \lambda_2(w'\iota - 1)$$

Warunki pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w'} &= 2\Sigma w + \lambda_1 \mu + \lambda_2 \iota = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} &= w'\mu - \mu_0 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} &= w'\iota - 1 = 0. \end{aligned}$$

Portfel o minimalnym ryzyku i stopie zwrotu μ_0

Warunki w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2\Sigma & \mu & \iota \\ \mu' & 0 & 0 \\ \iota' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_N \\ \mu_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} w \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Sigma & \mu & \iota \\ \mu' & 0 & 0 \\ \iota' & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_N \\ \mu_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portfel N akcji z aktywem wolnym od ryzyka

Oznaczenia:

- $w = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_N]'$ - wektor wag dla akcji
- $w_f = 1 - w'\iota$ - udział aktywa wolnego od ryzyka w portfelu

Stopa zwrotu z portfela:

$$r_{pf} = r_f + w'(r - \iota r_f),$$

ma rozkład $r_p \sim N(\mu_{pf}, \sigma^2_{pf})$, gdzie:

$$\begin{aligned} \mu_{pf} &= r_f + w'(\mu - \iota r_f) \\ \sigma^2_{pf} &= w'\Sigma w. \end{aligned}$$

Wyznaczanie portfela stycznego: metoda nie-wprost

Etap I: Wyznaczenie portfela o minimalnym ryzyku i oczekiwanej stopie μ_0

Problem optymalizacyjny:

$$\min_{w} \sigma^2_{pf} = w'\Sigma w.$$

p.w.

$$\mu_{pf} = r_f + w'(\mu - \iota r_f) = \mu_0$$

Lagrangean:

$$\mathcal{L} = w'\Sigma w + \lambda(r_f + w'(\mu - \iota r_f) - \mu_0)$$

Warunki pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w'} = 2\Sigma w + \lambda(\mu - \iota r_f) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = r_f + w'(\mu - \iota r_f) - \mu_0 = 0.$$

Wyznaczanie portfela stycznego: metoda nie-wprost

Etap II: ciekawe podstawienie

Niech:

$$\mu_0 = r_f + (\mu - \iota r_f)'\Sigma^{-1}(\mu - \iota r_f).$$

Zgodnie z warunkiem $r_f + w'(\mu - \iota r_f) - \mu_0 = 0$ wagi wynoszą:

$$w = \Sigma^{-1}(\mu - \iota r_f),$$

zaś ich suma to $\iota' w = \iota'\Sigma^{-1}(\mu - \iota r_f)$. Tym samym wagi portfela stycznego wynoszą:

$$w^* = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - \iota r_f)}{\iota'\Sigma^{-1}(\mu - \iota r_f)}.$$

Portfela dla akcji notowanych na GPW

Dane miesięczne z okresu 2000 - 2010 dla 5 akcji notowanych na GPW

```
Dane miesięczne z okresu 2000 - 2010
Charakterystyki stop zwrotu
                ASSE      HAND     KGHM      TPSA      ZYWI
Min         -0.46322 -0.35555 -0.4949 -0.225855 -0.20479
Srednia      0.00928  0.00664  0.0176 -0.000782  0.00658
Max          1.09786  0.33609  0.3041  0.338975  0.26895
Odch. Std.   0.16903  0.08955  0.1316  0.087935  0.06321

Korelacja stóp zwrotu
      ASSE  HAND  KGHM  TPSA  ZYWI
ASSE 1.000 0.160 0.284 0.389 0.188
HAND 0.160 1.000 0.348 0.196 0.174
KGHM 0.284 0.348 1.000 0.336 0.241
TPSA 0.389 0.196 0.336 1.000 0.226
ZYWI 0.188 0.174 0.241 0.226 1.000
```

Portfel dla akcji notowanych na GPW

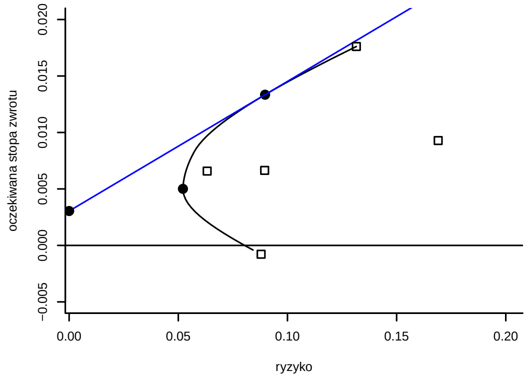
```
> Spec <- portfolioSpec()
> minvariancePortfolio(r, Spec)
> setTargetReturn(Spec) = 0.01
> efficientPortfolio(r, Spec, Constraints)
> setRiskFreeRate(Spec) <- log(0.0366/12 + 1)
> tangencyPortfolio(r, Spec, Constraints); tP

Wagi:
Portfel:              ASSE  HAND  KGHM  TPSA  ZYWI
Minimalne ryzyko      0.000 0.229 0.000 0.215 0.556
Min. ryzyko, mu=0.01  0.021 0.140 0.304 0.000 0.535
Portfel styczny       0.009 0.000 0.611 0.000 0.380

Portfel:              mu     Sigma  CVaR   VaR
Minimalne ryzyko      0.005  0.052  0.118  0.082
Min. ryzyko, mu=0.01  0.010  0.065  0.154  0.105
Portfel styczny       0.013  0.090  0.218  0.119

Wsp. Sharpe'a dla portfela stycznego: 0.115
```

Portfel dla akcji notowanych na GPW



Analiza wrażliwości

Podzielmy próbę na cztery równe podokresy i dla każdego z tych podokresów obliczmy charakterystyki portfela o minimalnym ryzyku oraz narysujmy granicę efektywną.

```
Wagi portfela o minimalnym ryzyku

                      ASSE  HAND  KGHM  TPSA  ZYWI     mu     sig
2000-sty - 2002-wrz 0.000 0.528 0.137 0.105 0.231  -0.0039 0.0615
2002-paz - 2005-cze 0.187 0.241 0.000 0.001 0.571   0.0154 0.0420
2005-lip - 2008-mar 0.113 0.122 0.050 0.221 0.493   0.0140 0.0401
2008-kwi - 2010-gru 0.160 0.000 0.000 0.312 0.528  -0.0006 0.0365
```

Analiza wrażliwości