Dodatek 2. Wielowymiarowe modele GARCH model GoGarch

MODELOWANIE POLSKIEJ GOSPODARKI z R

Ogólna specyfikacja modelu MGARCH

Ogólna postać dla N-wymiarowego procesu MGARCH $\{y_t\}$:

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t, \epsilon_t \sim N(0, \Sigma_t),$$

gdzie:

- μ_t: wartość oczekiwana, która może być stałą lub dana np. modelem VAR
- Σ_t: warunkowa macierz kowariancji, która zależy od swoich przeszłych realizacji $\{\Sigma_{t-p} : q = 1, 2, \ldots, Q\}$ oraz od przeszłych realizacji składnika losowego $\{\epsilon_{t-p}\epsilon'_{t-p} : p = 1, 2, \ldots, P\}$

Klasyfikacja modeli MGARCH

Modele MGARCH można podzielić na trzy kategorię, w zależności od specyfikacji równania dla wariancji (za Bauwens, Laurent i Rombouts, 2006 oraz Silvennoinen, A. and T. Terasvirta, 2009):

1. Bezpośrednie uogólnienie jednowymiarowych modeli GARCH (VEC GARCH oraz BEKK)
2. Liniowe kombinacje jednorównaniowych modeli GARCH (GO-GARCH oraz FactorGARCH)
3. Nieliniowe kombinacje jednorównaniowych modeli GARCH (CCC-GARCH, DCC-GARCH)

Model VEC-GARCH

Postać modelu VEC-GARCH(1,1) (Bollerslev, Engle i Wooldridge, 1988):

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu_t + \epsilon_t, \epsilon_t \sim N(0, \Sigma_t) \\
h_t &= \omega + Ae_{t-1} + Bh_{t-1} \\
h_t &= vech(\Sigma_t) \\
e_t &= vech(\epsilon_t \epsilon_t')
\end{aligned}
$$

gdzie operator $vech(\Sigma)$ oznacza wektor złożony z $\frac{N(N+1)}{2}$ elementów macierzy Σ znajdujących się na głównej przekątnej oraz powyżej tej przekątnej.

Model VEC-GARCH

Wady modelu VEC:

1. Duża liczba parametrów: macierze A i B są wymiarów $\frac{N(N+1)}{2} \times \frac{N(N+1)}{2}$
2. Skomplikowane restrykcje na ω, A i B gwarantujące, aby Σ_t spełniała warunki macierzy kowariancji.

W celu zmniejszenia liczby parametrów, Bollerslev, Engle i Wooldridge (1988) zaproponowali model DVEC-GARCH (diagonal VEC), w którym macierze A i B są diagonalne, a tym samym:

$$h_{ij,t} = \omega_{ij} + a_{ij}\epsilon_{i,t-1}\epsilon_{j,t-1} + b_{ij}h_{ij,t-1}.$$

W modelu DVEC-GARCH pozostaje problem (2). Dodatkowo, brak zależności między elementami macierzy H_t.

Model BEKK-GARCH

Postać restrykcji na parametry macierzy ω, A i B modelu VEC-GARCH, które gwarantują pół-dodatnią określoność Σ_t, została zaproponowana przez Engle'a i Kroner (1995) w modelu BEKK-GARCH(1,1) postaci:

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t, \epsilon_t \sim N(0, \Sigma_t)$$
$$\Sigma_t = \Omega\Omega' + A\epsilon_{t-1}\epsilon'_{t-1}A' + B\Sigma_{t-1}B',$$

gdzie Ω jest macierzą górno-trójkątną, zaś A i B są macierzami kwadratowymi o wymiarach $N \times N$.

Model Factor-GARCH

Dla wysokich wartości N można stosować modele, w których zakłada się, że Σ_t jest opisywana przez $K \leq N$ liczbę wspólnych czynników. Tego typu modelem jest Factor GARCH(K,1,1) (por. Engle, Ng i Rothschild, 1990):

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu_t + \epsilon_t, \epsilon_t \sim N(0, \Sigma_t) \\
\epsilon_t &= \Lambda f_t + \eta_t, \eta_t \sim N(0, \Omega) \\
\Omega &= \mathrm{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_N^2) \\
f_t &\sim N(0, H_t) \\
H_t &= \mathrm{diag}(h_{1t}, h_{2t}, \ldots, h_{Kt}) \\
h_{kt} &= \gamma_k + \alpha_k f_{k,t-1}^2 + \beta_k h_{k,t-1} \text{ dla } k = 1, 2, \ldots, K \\
\Sigma_t &= \Lambda H_t \Lambda' + \Omega
\end{aligned}
$$

Macierz Λ o wymiarach $N \times K$ oraz wartości dla f_t wartości można wyznaczyć np. metodą głównych składowych

Model GO-GARCH

Postać model GO-GARCH(1,1) (Generalized Orthogonal GARCH, Van der Weide, 2002):

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu_t + \epsilon_t, \epsilon_t \sim N(0, \Sigma_t) \\
\epsilon_t &= Zx_t,\ x_t \sim N(0, H_t) \\
\Sigma_t &= ZH_tZ' \\
H_t &= \mathrm{diag}(h_{1t}, h_{2t}, \ldots, h_{Nt}) \\
h_{it} &= \gamma_i + \alpha_i x_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{it-1} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, N
\end{aligned}
$$

Idea modelu: wielowymiarowa macierz kowariancji warunkowej o wymiarze $\frac{N(N+1)}{2}$ jest złożeniem N jednowymiarowych modeli GARCH

Model GO-GARCH

Ważne pytanie: jak uzyskać Z?

Macierz bezwarunkowej wariancji $\Sigma = Var(y_t)$ jest zapisywana jako:

$$\Sigma = ZZ' = (V\Lambda^{-1/2}U)(U'\Lambda^{-1/2}V'),$$

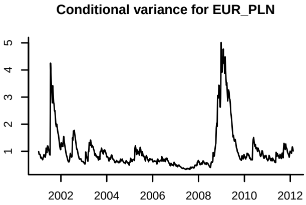
gdzie:

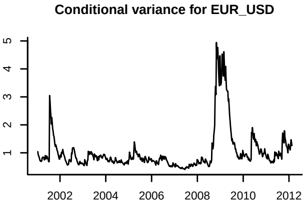
- V: macierz wektorów własnych Σ
- Λ: diagonalna macierz wartości własnych Σ
- U: ortonormalna macierz rotacji (tutaj jest główny problem)

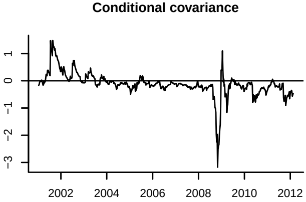
GO-GARCH: Przyklad dla EUR/PLN oraz EUR/USD

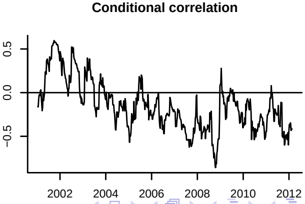
```
> library(gogarch)
> z <- gogarch(y, ~garch(1, 1)); summary(z)

Odwrotnosc macierzy Z (y = Zx):
 -0.84 -0.62
 -0.55  0.79

Modele GARCH(1,1) dla y1 oraz y2

       Est.   StDev  Prob  |  Est.   StDev  Prob
omega  0.015  0.010  1.257 |  0.053  0.028  0.0578
alpha1 0.117  0.026  1.248 |  0.103  0.034  0.0031
beta1  0.873  0.026  0.000 |  0.843  0.057  0.0000
```

GO-GARCH: Przyklad dla EUR/PLN oraz EUR/USD









Zadanie 1

Wgraj dane subindeksów sektorowych dla wskaźnika EURO STOXX za pomocą poleceń:

```
> library(gogarch)
> data(BVDWSTOXX)
```

Wybierz trzy subindeksy i wykonaj następujące polecenia:

1. Policz logarytmiczne stopy zwrotów.
2. Oszacuj model Go-GARCH za pomocą metody ICA (z wyrazem wolnym w równaniu poziomu dla nieobserwowalnych czynników).
3. Stwórz wykres warunkowych wariancji i warunkowych korelacji.
4. Oblicz prognozę stóp zwrotu ($E_T[\mu_{T+1}]$) oraz wariancji ($E_T[\Sigma_{T+1}]$) na najbliższy okres.
5. Oblicz 5% VaR na najbliższy okres z modelu Go-GARCH dla portfela o wagach $w = [1/3\ 1/3\ 1/3]'$
6. Porównaj wyniki z poprzedniego punktu z wartością VaR uzyskaną na podstawie prognoz dla μ_{T+1} i Σ_{T+1} opartych o historyczne średnie.

Zadanie 2

Wgraj dane subindeksów sektorowych dla wskaźnika EURO STOXX za pomocą poleceń:

```
> library(gogarch)
> data(BVDWSTOXX)
```

Wybierz trzy subindeksy i wykonaj następujące polecenia:

1. Policz logarytmiczne stopy zwrotów.
2. Oszacuj model Factor-GARCH z 3 czynnikami

```
K  <- 3
PC <- princomp(x, cor = FALSE, scores = TRUE)
f  <- PC$scores[,1:K]
B  <- PC$loadings[,1:K]
```

3. Oszacuj model GARCH(1,1) dla każdego czynnika
4. Stwórz wykres warunkowych wariancji i warunkowych korelacji.
5. Oblicz prognozę stóp zwrotu ($E_T[\mu_{T+1}]$) oraz wariancji ($E_T[\Sigma_{T+1}]$) na najbliższy okres.
6. Oblicz 5% VaR na najbliższy okres z modelu Factor-GARCH dla portfela o wagach $w = [1/3\ 1/3\ 1/3]'$
7. Porównaj wyniki z poprzedniego punktu z wartością VaR uzyskaną na podstawie modelu Go-Garch

Literatura:

1. Bauwens, L., Laurent, S. and Rombouts, J. (2006), Multivariate GARCH models: A survey, Journal of Applied Econometrics 21(1): 79 - 109
2. Bollerslev T, Engle R.F., Wooldridge J.M. (1988), A capital asset pricing model with time varying covariances, Journal of Political Economy 96: 116–131.
3. Engle R., Kroner F.K., (1995), Multivariate simultaneous generalized ARCH, Econometric Theory 11: 122–150.
4. Engle R., Ng V.K., Rothschild M. (1990). Asset pricing with a factor-ARCH covariance structure: empirical estimates for treasury bills. Journal of Econometrics 45: 213–238.
5. Silvennoinen, A. and T. Terasvirta (2009), "Multivariate GARCH models", chapter in Handbook of Financial Time Series: 201-229.
6. Van der Weide, R. (2002), GO-GARCH: A Multivariate Generalized Orthogonal GARCH Model, Journal of Applied Econometrics 17(5): 549 - 564.