Dodatek 3. Wielowymiarowe modele GARCH
model DCC-GARCH

MODELOWANIE POLSKIEJ GOSPODARKI z R

Ogólna specyfikacja modelu MGARCH

Ogólna postać dla N-wymiarowego procesu MGARCH $\{y_t\}$:

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t, \epsilon_t \sim N(0, \Sigma_t),$$

gdzie:

- μ_t: wartość oczekiwana, która może być stałą lub dana np. modelem VAR
- Σ_t: warunkowa macierz kowariancji, która zależy od swoich przeszłych realizacji $\{\Sigma_{t-p} : q = 1, 2, \ldots, Q\}$ oraz od przeszłych realizacji składnika losowego $\{\epsilon_{t-p}\epsilon'_{t-p} : p = 1, 2, \ldots, P\}$

Klasyfikacja modeli MGARCH

Modele MGARCH można podzielić na trzy kategorię, w zależności od specyfikacji równania dla wariancji (za Bauwens, Laurent i Rombouts, 2006 oraz Silvennoinen, A. and T. Terasvirta, 2009):

1. Bezpośrednie uogólnienie jednowymiarowych modeli GARCH (VEC GARCH oraz BEKK)
2. Liniowe kombinacje jednorównaniowych modeli GARCH (GO-GARCH oraz FactorGARCH)
3. Nieliniowe kombinacje jednorównaniowych modeli GARCH (CCC-GARCH, DCC-GARCH)

CCC-GARCH

Model CCC-GARCH (Constant Conditional Correlation, Bollerslev 2002) jest postaci:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu_t + \epsilon_t,\ \ \epsilon_t \sim N(0, \Sigma_t) \\
\Sigma_t &= D_t P D_t \\
D_t &= \mathrm{diag}(\sqrt{h_{1t}}, \sqrt{h_{2t}}, \ldots, \sqrt{h_{Nt}}) \\
h_{it} &= \gamma_i + \alpha_i \epsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{it-1} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, N
\end{aligned}
$$

gdzie P jest macierzą korelacji

Rozszerzenie E(xtended)CCC-GARCH (Jeantheau 1998):

$$h_{it} = \gamma_i + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} \epsilon_{j,t-1}^2 + \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} h_{jt-1} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, N$$

Inna metoda zapisu dla (E)CCC-GARCH (Jeantheau 1998):

$$h_t = \gamma + A\epsilon_{t-1} \odot \epsilon_{t-1} + B h_{t-1}$$

gdzie $\odot$ jest iloczynem Hadamarda (element by element).
Dla modelu CCC-GARCH macierze A iB są diagonalne.

DCC-GARCH

Model DCC-GARCH (Dynamic Conditional Correlation, Engle 2002) jest postaci:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu_t + \epsilon_t, \ \epsilon_t \sim N(0, \Sigma_t) \\
\Sigma_t &= D_t P_t D_t \\
D_t &= \mathrm{diag}(\sqrt{h_{1t}}, \sqrt{h_{2t}}, \ldots, \sqrt{h_{Nt}}) \\
h_{it} &= \gamma_i + \alpha_i \epsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{it-1} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, N
\end{aligned}
$$

Rozszerzenie E(xtended)DCC-GARCH:

$$
h_{it} = \gamma_i + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} \epsilon_{j,t-1}^2 + \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} h_{jt-1} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, N
$$

DCC-GARCH

Model DCC-GARCH (Dynamic Conditional Correlation, Engle 2002) jest postaci:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu_t + \epsilon_t,\ \epsilon_t \sim N(0, \Sigma_t) \\
\Sigma_t &= D_t P_t D_t \\
D_t &= \mathrm{diag}(\sqrt{h_{1t}}, \sqrt{h_{2t}}, \ldots, \sqrt{h_{Nt}}) \\
h_{it} &= \gamma_i + \alpha_i \epsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{it-1} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, N
\end{aligned}
$$

Metoda na uwzględnienie dynamiki macierzy korelacji:

$$
\begin{aligned}
z_t &= D_t^{-1} \epsilon_t,\ \text{zatem } Var(z_{it}) = 1 \\
Q_t &= (1 - \alpha - \beta) Q + \alpha z_{t-1} z_{t-1}' + \beta Q_{t-1} \\
P_t &= (Q_t \odot I)^{-0.5} Q_t (Q_t \odot I)^{-0.5}
\end{aligned}
$$

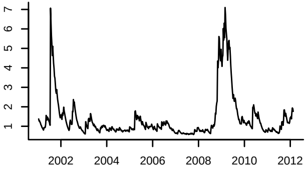
gdzie P_t jest macierzą warunkowej korelacji, zaś $\odot$ jest iloczynem Hadamarda (element by element)

DCC-GARCH: przykład

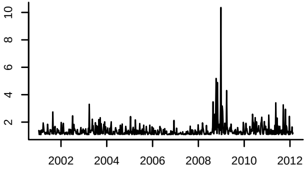
```
> library(ccgarch); library(tseries)
> z1 <- garch(y[,1], order = c(1, 1)); z1 <- coef(z1)
> z2 <- garch(y[,2], order = c(1, 1)); z2 <- coef(z2)
> omega <- c(z1[1], z2[1]);
> A <- diag(c(z1[2],z2[2])); B <- diag(c(z1[3],z2[3]))
> uncR <- cor(y)             # unconditional correlation
> dcc.para <- c(0.1,0.1)    # alpha i beta
> z <- dcc.estimation(inia=omega, iniA=A, iniB=B, ini.dcc=dcc.para,
  dvar=y, model="diagonal")
> z$out # oszacowania parametrow

           a1    a2   A11   A22   B11   B22  alpha  beta
est.    0.053 1.092 0.089 0.214 0.873 0.000  0.128 0.732
StDev   0.020 0.031 0.043 0.287 0.100 0.228  0.013 0.068

> z$h   # wariancje warunkowe (diagonala D_t)
  [1,] 1.377  1.389
  [2,] 1.268  1.093
  [3,] 1.279  1.179
..................................
> z$DCC # warunkowe korelacje (macierz P_t)
  [1,]    1 -0.083 -0.083   1
  [2,]    1 -0.086 -0.086   1
  [3,]    1  0.024  0.024   1
......................................
```

DCC-GARCH: Przyklad dla EUR/PLN oraz EUR/USD

Conditional variance for EUR_PLN

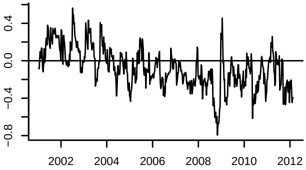


Conditional variance for EUR_USD



Conditional covariance

Conditional correlation



Zadanie 1

Dla modelu DCC-GARCH dla kursów EUR/PLN oraz EUR/USD:

1. Oblicz prognozę dla wariancji Σ_t (podobnie jak dla modelu CCC-GARCH) dla horyzontu $H = 1$ oraz $H = 5$ za pomocą następującego algorytmu:
   - Oblicz prognozę dla h_t korzystając ze wzoru $h_{T+1} = \gamma + A\epsilon_T \odot \epsilon_T + Bh_T$
   - Oblicz prognozę dla Q_t korzystając ze wzoru $Q_{T+1} = (1 - \alpha - \beta)Q + \alpha z_T z_T' + \beta Q_T$
   - Dokonaj standaryzacji $P_T = (Q_T \odot I)^{-0.5} Q_T (Q_T \odot I)^{-0.5}$ oraz $Q_T = P_T$
   - Wykorzystaj wzór $\Sigma_t = D_t P_t D_t$
2. Oblicz 5% VaR na najbliższy okres z modelu DCC-GARCH dla portfela o wagach $w = [1/2\ 1/2]'$ dla $H = 1$ oraz $H = 5$.
3. Porównaj wyniki z poprzedniego punktu z wartością VaR uzyskaną na podstawie modelu CCC-GARCH.

Zadanie 2

Wgraj dane subindeksów sektorowych dla wskaźnika EURO STOXX za pomocą poleceń:

```
> library(gogarch)
> data(BVDWSTOXX)
```

Wybierz trzy subindeksy i wykonaj następujące polecenia:

1. Policz logarytmiczne stopy zwrotów.
2. Oszacuj model DCC-GARCH (lub CCC-GARCH)
3. Oblicz prognozę dla wariancji Σ_t dla horyzontu $H = 1$ oraz $H = 5$
4. Oblicz 5% VaR na najbliższy okres z modelu DCC-GARCH dla portfela o wagach $w = [1/3 \; 1/3 \; 1/3]'$ dla $H = 1$ oraz $H = 5$
5. Porównaj wyniki z poprzedniego punktu z wartością VaR uzyskaną na podstawie prognoz z modelu GO-GRACH oraz opartych o historyczne średnie.

Literatura:

1. Bollerslev T. (1990). Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model. Review of Economics and Statistics 72: 498–505.
2. Bauwens, L., Laurent, S. and Rombouts, J. (2006). Multivariate GARCH models: A survey, Journal of Applied Econometrics 21(1): 79 - 109
3. Engle, R.F. (2002). Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models, Journal of Business and Economic Statistics 20: 339–350.
4. Jeantheau T. (1998). Strong consistency of estimators for multivariate ARCH models. Econometric Theory 14: 70–86.
5. Silvennoinen A., Terasvirta T., (2009). Multivariate GARCH models, chapter in Handbook of Financial Time Series: 201-229.