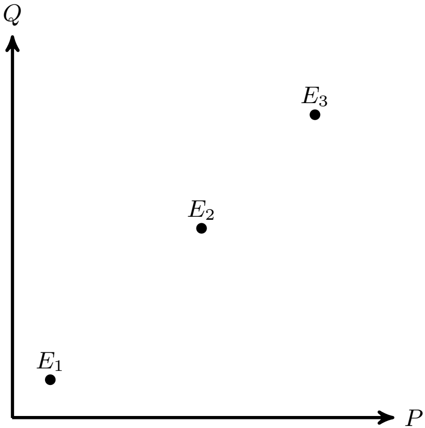
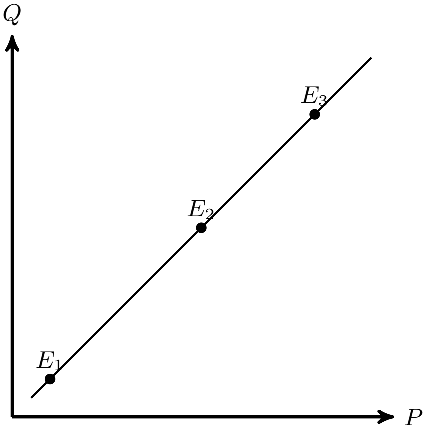
Metody Ekonometryczne
Modele wielorównaniowe

Jakub Mućk
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Wprowadzenie



Q to ilość dobra
P to cena dobra
E_1, E_2 oraz E_3 to obserwowane wielkości.

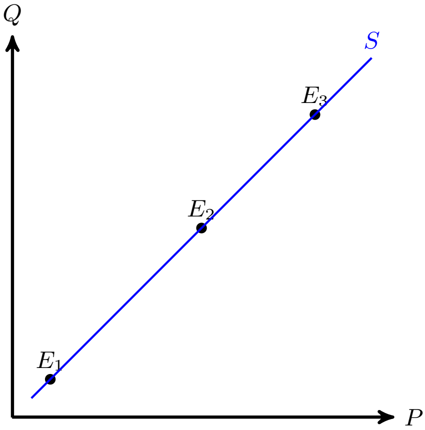


Q to ilość dobra
P to cena dobra
E_1, E_2 oraz E_3 to obserwowane wielkości.

Zależność wynikająca z obserwacji empirycznych:

$$Q = \beta_0 + \beta_1 P + \varepsilon \quad (1)$$

Jakiego znaku jest β_1?

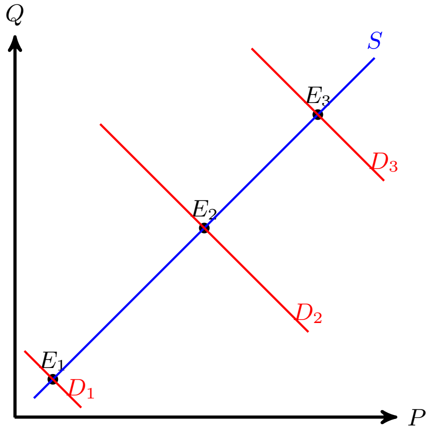


Q to ilość dobra
P to cena dobra
E_1, E_2 oraz E_3 to obserwowane wielkości.

Krzywa podaży (S)

$$Q_S = \beta_0 + \beta_1 P + \varepsilon_s \tag{1}$$

gdzie ε_s to nieobserowalna determinanta podaży (*unobservable supply shifter*)



Q to ilość dobra
P to cena dobra
E_1, E_2 oraz E_3 to obserwowane wielkości.

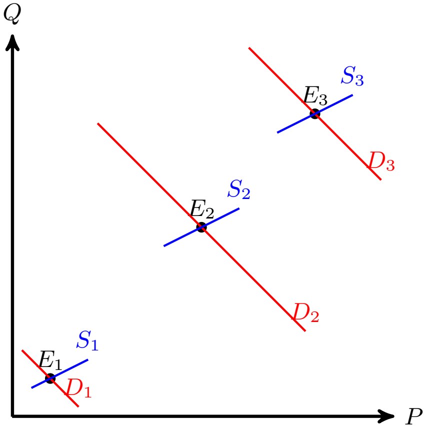
Krzywa podaży (S)

$$Q_S = \beta_0 + \beta_1 P + \varepsilon_s \tag{1}$$

gdzie ε_s to nieobserowalna determinanta podaży (*unobservable supply shifter*)
Krzywe popytu (D_i) dla różnych wartości Z

$$Q_D = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 Z + \varepsilon_d \tag{2}$$

gdzie Z to obserowalna determinanta popytu (*observable demand shifter*), a ε_d to nieobserowalna determinanta popytu (*unobservable demand shifter*).



Q to ilość dobra
P to cena dobra
E_1, E_2 oraz E_3 to obserwowane wielkości.

Krzywe podaży (S_i) dla różnych wartości X:

$$Q_S = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 X + \varepsilon_s \quad (1)$$

gdzie X to obserowalna determinanta podaży (*observable demand shifter*), a ε_s to nieobserowalna determinanta podaży (*unobservable supply shifter*)

Krzywe popytu (D_i) dla różnych wartości Z

$$Q_D = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 Z + \varepsilon_d \quad (2)$$

gdzie Z to obserowalna determinanta popytu (*observable demand shifter*), a ε_d to nieobserowalna determinanta popytu (*unobservable demand shifter*).

- Modele wielorównaniowe mogą pozwolić na wyeliminowanie obciążenia oszacowań wynikającego z jednoczesnej współzależności (*simultaneity bias*).
- Modele wielorównaniowe mogą pozwolić na uwzględnienie jednoczesnej współzależności pomiędzy zmiennymi endogenicznymi.
- Kluczowym problemem jest problem identyfikowalności.

Oznaczenia i terminologia

- Postać strukturalna (*structural form*) to postać modelu wynikająca z teorii ekonomii.
- Dla układu M równań

$$
\begin{array}{lllllll}
\gamma_{11}y_{1t}+ & \ldots+ & \gamma_{1M}y_{Mt}+ & \beta_{11}x_{1t}+ & \ldots+ & \beta_{1K}x_{Kt} & = & \varepsilon_{1t} \\
\gamma_{21}y_{2t}+ & \ldots+ & \gamma_{2M}y_{Mt}+ & \beta_{21}x_{2t}+ & \ldots+ & \beta_{2K}x_{Kt} & = & \varepsilon_{2t} \\
 & & & & & & \vdots & \\
\gamma_{M1}y_{1t}+ & \ldots+ & \gamma_{MM}y_{Mt}+ & \beta_{M1}x_{Mt}+ & \ldots+ & \beta_{MK}x_{Kt} & = & \varepsilon_{Mt}
\end{array}
$$

- M **zmiennych endogenicznych:** $y_{1t}, y_{2t}, \ldots, y_{Mt}$.
- K **zmiennych egzogenicznych:** $x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{Kt}$.
- M **strukturalnych zaburzeń losowych:** $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \ldots, \varepsilon_{Mt}$.
- Przyjmując, że $\varepsilon = [\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \ldots, \varepsilon_{Mt}]$

$$\mathbb{E}(\varepsilon) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon^T) = \Sigma,$$

gdzie Σ to macierz wariancji-kowariancji pomiędzy zaburzeniami strukturalnymi.

- Postać strukturalna (*structural form*): przy pomocy zapisu macierzowego dla każdej obserwacji (t):

$$[y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_M]_t \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1M} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2M} \\ & & \vdots & \\ \gamma_{M1} & \gamma_{M2} & \dots & \gamma_{MM} \end{bmatrix} +$$

$$+ [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_K]_t \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1M} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2M} \\ & & \vdots & \\ \beta_{M1} & \beta_{M2} & \dots & \beta_{MM} \end{bmatrix} = [\varepsilon_1 \quad \dots \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_M]_t$$

- Postać strukturalna (*structural form*) – zapis macierzowy:

$$\mathbf{Y}\Gamma + \mathbf{X}\mathbf{B} = \varepsilon, \tag{3}$$

  gdzie (przyjmując T jako liczbę obserwacji):
  - $\mathbf{Y}$ to macierz zmiennych endogenicznych o wymiarach $T \times M$.
  - $\mathbf{X}$ to macierz zmiennych egzogenicznych o wymiarach $T \times K$.
  - ε to macierz struturalnych zaburzeń losowych o wymiarach $T \times M$.
  - Γ macierz parametrów przy zmiennych endogenicznych o wymiarach $M \times M$.
  - $\mathbf{B}$ macierz parametrów przy zmiennych egzogenicznych o wymiarach $K \times M$.
- Ponadto:

$$\mathbb{E}(\varepsilon) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon^T) = \Sigma,$$

  gdzie Σ to macierz wariancji-kowariancji pomiędzy zaburzeniami strukturalnymi.
- Zatem na postać strukturalną składają się: Γ, $\mathbf{B}$, ale i Σ.

- Postać zredukowana (*reduced form*):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\Pi + \nu, \tag{4}$$

- Postać zredukowana (*reduced form*):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\Pi + \nu, \tag{4}$$

- gdzie

$$\Pi = -\mathbf{B}\Gamma^{-1} \tag{5}$$

oraz ν to macierz zaburzeń formy zredukowanej:

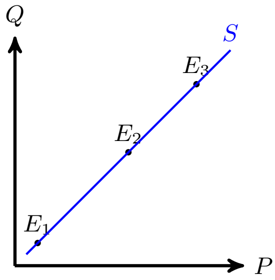
$$\nu = \varepsilon\Gamma^{-1} \tag{6}$$

oraz

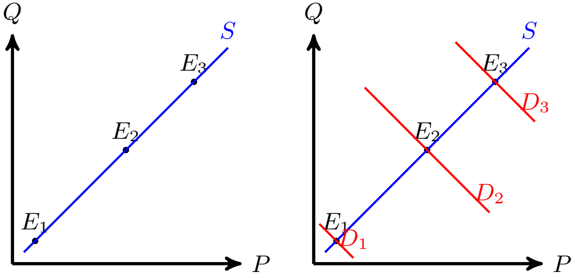
$$\mathbb{E}(\nu\nu^T) = \left(\Gamma^{-1}\right)^T \Sigma\Gamma^{-1} = \Omega. \tag{7}$$

Problem identyfikacji parametrów

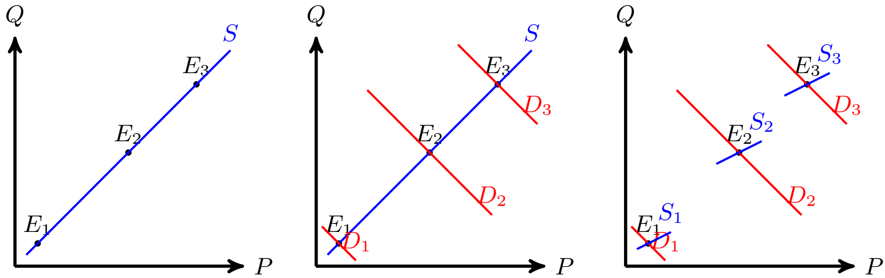
Obserwacje empiryczne: E_1, E_2 oraz E_3.



Obserwacje empiryczne: E_1, E_2 oraz E_3.



Obserwacje empiryczne: E_1, E_2 oraz E_3.



- Postać strukturalna (*structural form*):

$$\mathbf{Y}\Gamma + \mathbf{X}\mathbf{B} = \varepsilon \tag{8}$$

- Postać zredukowana (*reduced form*):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\Pi + \nu \tag{9}$$

$$\Pi = -\mathbf{B}\Gamma^{-1} \tag{10}$$

- Intuicyjnie, kluczowy jest przypadek, gdy jedna postać zredukowana odpowiada dokładnie jednej postaci strukturalnej.
- W przypadku, gdy kilka postaci strukturalnych może prowadzić do tej samej postaci zredukowanej pojawia się problem braku identyfikowalności parametrów.
- Przykładowo, niech $\mathbf{F}$ będzie pewną nieosobliwą macierzą. Zapiszemy nową, alternatywną postać strukturalną, która będzię transformacją prawdziwej postaci strukturalnej:

$$\mathbf{Y}\tilde{\Gamma} + \mathbf{X}\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\varepsilon} = \mathbf{Y}\Gamma\mathbf{F} + \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{F} = \varepsilon\mathbf{F} \tag{11}$$

  Wtedy postać zredukowana *nowej* postaci strukturalnej będzie taka sama jak prawdziwej!

$$\tilde{\Pi} = -\mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\Gamma^{-1} = \mathbf{B}\Gamma^{-1} = \Pi \tag{12}$$

- Zatem postacie strukturalne są ekwiwalentne pod względem obserwacji.
- **Kluczowe jest wykorzystanie informacji z poza próby (nonsample information)**, a więc restrykcji wynikających z teorii ekonomii.

- Przykład (q_d – popyt; q_s – podaż, p – cena; z – inna zmienna egzogeniczna):

$$q_d = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 z + \varepsilon_d \tag{13}$$
$$q_s = \beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 z + \varepsilon_s \tag{14}$$
$$q_d = q_s \tag{15}$$

Po drobnej manipulacji postać zredukowana oraz przy złożeniu, że $\alpha_1 \neq \beta_1$:

$$q = \frac{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} z + \frac{\alpha_1\varepsilon_s - \alpha_2\varepsilon_d}{\alpha_1 - \beta_1} = \pi_{11} + \pi_{21} z + \nu_q, \tag{16}$$
$$p = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\beta_1 - \alpha 2}{\alpha_1 - \beta_2} z + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_d}{\alpha_1 - \beta_1} = \pi_{12} + \pi_{22} z + \nu_p, \tag{17}$$

Postać zredukowana zawiera zaledwie cztery parametry (π_{11}, π_{12}, π_{21} i π_{22}), a postać strukturalna aż sześć parametrów (α_0, α_1, α_2, β_0, β_1 i β_2). Oczywistym zatem jest fakt, że nie ma kompletnego rozwiązania dla wszystkich sześciu parametrów postaci strukturalnej w zależności od parametrów postaci zredukowanej.

- Modyfikacja: w rówaniu popytowym zamienimy z na x

$$
\begin{aligned}
q_d &= \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 x + \varepsilon_d && (18)\\
q_s &= \beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 z + \varepsilon_s && (19)\\
q_d &= q_s && (20)
\end{aligned}
$$

Postać strukturalna

$$
\begin{bmatrix} q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & x & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 \\ -\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_d & \varepsilon_s \end{bmatrix} \tag{21}
$$

Postać zredukowana:

$$
\begin{bmatrix} q & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1)/\gamma & (\beta_0 - \alpha_0)/\gamma \\ -\alpha_2\beta_1/\gamma & -\alpha_2/\gamma \\ \alpha_1\beta_2/\gamma & \beta_2/\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 \end{bmatrix} \tag{22}
$$

gdzie $\gamma = \alpha_1 - \beta_1$
Zauważmy, że dopuszczalne postacie strukturalne, w tym nieprawdziwe, modelu mają następującą postać strukturalną:

$$
\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{BF} = \begin{bmatrix} \alpha_0 f_{11} + \beta_0 f_{12} & \alpha_0 + \beta_0 f_{22} \\ \alpha_2 f_{11} & \alpha_2 f_{12} \\ \beta_2 f_{21} & \beta_2 f_{22} \end{bmatrix},
$$

Warto zauważyć, że

- gdzy $f_{12} \neq 0 \implies$ zmienna x pojawia się w równianiu podażowym. Jest to niespójne z teorią opisaną przez postać struturalną.
- gdzy $f_{21} \neq 0 \implies$ zmienna z pojawia się w równianiu popytowym. Jest to niespójne z teorią opisaną przez postać struturalną.

Zatem $f_{12} = f_{21} = 0$ aby postać zredukowana była spójna z rozważaną teorią. $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ (jedynki przy zmiennej q) będzie jedyną transformacją gwarantującą spójność postaci zredukowanej z formą strukturalną.
Unikalnym rozwiązniem dla postaci strukturalnej jest zatem

$$\alpha_0 = \pi_{11} - \pi_{12}\left(\frac{\pi_{31}}{\pi_{32}}\right), \quad \alpha_1 = \frac{\pi_{31}}{\pi_{32}}, \quad \alpha_2 = \pi_{22}\left(\frac{\pi_{21}}{\pi_{22}} - \frac{\pi_{31}}{\pi_{32}}\right),$$

$$\beta_0 = \pi_{11} - \pi_{12}\left(\frac{\pi_{21}}{\pi_{22}}\right), \quad \beta_1 = \frac{\pi_{21}}{\pi_{22}}, \quad \beta_2 = \pi_{32}\left(\frac{\pi_{31}}{\pi_{32}} - \frac{\pi_{21}}{\pi_{22}}\right).$$

- Postać strukturalna:
  - Γ jest nieosobliwą macierzą o wymariach $M \times M \implies M^2$ parametrów.
  - $\mathbf{B}$ jest wymiarów $K \times M \implies KM$ parametrów.
  - Σ jest macierzą symetryczną o wymariach $M \times M \implies \frac{1}{2}M(M+1)$ parametrów.

  Zatem postać strukturalna posiada $M^2 + KM + \frac{1}{2}M(M+1)$.

- Postać strukturalna:
  - Γ jest nieosobliwą macierzą o wymariach $M \times M \implies M^2$ parametrów.
  - $\mathbf{B}$ jest wymiarów $K \times M \implies KM$ parametrów.
  - Σ jest macierzą symetryczną o wymariach $M \times M \implies \frac{1}{2}M(M+1)$ parametrów.

  Zatem postać strukturalna posiada $M^2 + KM + \frac{1}{2}M(M+1)$.
- Postać zredukowana
  - Π jest wymiarów $K \times M \implies KM$ parametrów.
  - Ω jest macierzą symetryczną o wymariach $M \times M \implies \frac{1}{2}M(M+1)$ parametrów.

  Zatem postać zredukowana posiada $KM + \frac{1}{2}M(M+1)$.
- Różnica w liczbie parametrów to M^2. Dlatego, kluczowe jest wykorzystanie informacji z poza próby (*non-sample information*).

1. **Normalizacja (Normalization)** – w każdym równaniu jeden współczynnik powinien mieć wartość 1. Zazwyczaj, jest to parametr przy zmiennej endogenicznej.
   - Wtedy liczba restrykcji redukuje się do $M(M-1)$ (z M^2).
2. **Tożsamości (Identities)**.
3. **Wykluczenia (Exclusion)** – zerowe restrykcje na macierze Γ i $\mathbf{B}$.
4. **Liniowe restrykcje (Linear restrictions)**.
   - Aczkolwiek liniowe restykcje mogą czasem prowadzić do *błędnej postaci strukturalnej*. Przykładowym problem jest brak możliwości zidenyfikowania efektów korzyści skali przy identyfikacji postępu technologicznego dla zagregowanej funkcji produkcji.
5. **Restrykcje na macierz wariancji kowariancji zaburzeń losowych** Σ.
   - Współczesne badania makroekonomiczne wykorzystują modele wektorowej autoregresji VAR w celu zidentyfikowania wpływu (strukturalnych) szoków makroekonomicznyc Kluczowym założeniem jest tutaj sferyczność macierzy Σ.

- Rozważamy jedną zmienną endogeniczną y_j (tj. j-te równanie).

	Zmienne endogeniczne	Zmienne egzogeniczne
Włączone	$\mathbf{Y}_j$ M_j zmiennych	$\mathbf{X}_j$ K_j zmiennych
Pominięte	$\mathbf{Y}_j^*$ M_j^* zmiennych	$\mathbf{X}_j^*$ K_j^* zmiennych

- Liczba równań (zmiennych endogenicznych): $M = M_j + M_j^* + 1$
- Liczba zmiennych egzogenicznych: $K = K_j + K_j^*$
- Postać zredukowana:

$$\begin{bmatrix} y_j & \mathbf{Y}_j & \mathbf{Y}_j^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_j & \mathbf{X}_j^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_j & \tilde{\Pi}_j & \bar{\Pi}_j \\ \pi_j^* & \tilde{\Pi}_j^* & \bar{\Pi}_j^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_j & V_j & V_j^* \end{bmatrix} \tag{23}$$

- Na podstawie klasyfikacji zmiennych na włączone i pominięte, można zauważyć, że j-ta kolumny macierzy postaci strukturalnej są następujące:

$$\Gamma_j^T = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_j^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{B}_j^T = \begin{bmatrix} -\beta_j^T & 0 \end{bmatrix}.$$

- Zależnośność między postacią strukturalną a zredukowaną można zapisać jako:

$$\Pi\Gamma = -\mathbf{B},$$

a w przypadku j-tego równania postaci strukturalnej:

$$\Pi\Gamma_j = -\mathbf{B}_j,$$

co pozwala nam wyznaczyć dwa układy równań

$$\begin{aligned} \pi_j - \tilde{\Pi}_j\gamma_j &= \beta_j, \\ \pi_j^* &= \Pi_j^*\gamma_j, \end{aligned}$$

- Drugie równanie ma K_j^* równań i M_j niewiadomych. Jeżeli równanie to posiada rozwiązanie to można wyznaczyć β_j.

Warunek konieczny (*order condition*) dla j tego równania

$$K_j^* \geq M_j. \tag{24}$$

Liczba zmiennych egzogenicznych wyłączonych/pomiętych z równania j-tego nie może być mniejsza od liczby zmiennych endogenicznych w równaniu j-tym.

Warunek ten gwarantuje, że równanie $\pi_j^* = \Pi_j^* \gamma_j$ posiada przynajmniej jedno rozwiązanie.

Warunek wystarczający (*rank condition*) dla j tego równania

$$\text{rank}\left[\pi_j^*, \Pi_j^*\right] = \text{rank}\left[\Pi_j^*\right] = M_j \tag{25}$$

Spełnienie tego warunku gwarantuje dokładnie jedno rozwiązanie.

Analogicznie do metody zmiennych intrumentalnych można rozróżnić następujące przypadki identyfikowalności dla j-tego równania:

1. **Dokładnie identyfikowalne (*exactly identified*)** jeżeli $M_j = K_j^*$.
2. **Nadmiernie identyfikowalne (*overidentified*)** jeżeli $M_j < K_j^*$.
3. **Brak identyfikowalności (*underidentified*)** będzie równoznaczny sytuacji, gdy $M_j > K_j^*$.

gdzie
K_j^* to liczba zmiennych egzogenicznych pominiętych z równania j-tego;
M_j to liczba zmiennych endogenicznych w równaniu j-tym.

- Praktycznym sprawdzeniem warunku koniecznego (*order condition*) i wystarczającego *rank condition* jest metoda sprawdzająca rząd odpowiedniej podmacierzy.
- [Krok #1] Zapisujemy w tabeli parametry **postaci strukturalnej**, a więc:

y_1	y_2	$\dots$	y_M	1	x_1	x_2	$\dots$	x_k
		Γ^T				$\mathbf{B}^T$		

- [Krok #2] Dla każdego j-tego równania rozważamy macierz pozbawioną:
  - j-tego wiersza;
  - kolumn, ze zmiennymi występującymi w j-tym równaniu.

  Parametry j-tego równania będą identyfikowalne jeżeli macierz ta będzie miała pełny rząd (liczba wektorów niezależnych liniowo powinna odpowiadać liczbie wierszy).

$$
\begin{aligned}
q_d &= \alpha_0 + \alpha_1 p + \varepsilon_d \\
q_s &= \beta_0 + \beta_1 p + \varepsilon_s \\
q_d &= q_s
\end{aligned}
$$

q_d	q_s	1	p
1	0	$-\alpha_0$	$-\alpha_1$
0	1	$-\beta_0$	$-\beta_1$
1	-1	0	0

$$
\begin{aligned}
q_d &= \alpha_0 + \alpha_1 p + \varepsilon_d \\
q_s &= \beta_0 + \beta_1 p + \varepsilon_s \\
q_d &= q_s
\end{aligned}
$$

q_d	q_s	1	p
1	0	$-\alpha_0$	$-\alpha_1$
0	1	$-\beta_0$	$-\beta_1$
1	-1	0	0

równanie pierwsze: tylko wektor $[1 \quad -1]^T \implies$ niepełny rząd, a więc brak identyfikowalności.

$$q_d = \alpha_0 + \alpha_1 p + \varepsilon_d$$
$$q_s = \beta_0 + \beta_1 p + \varepsilon_s$$
$$q_d = q_s$$

q_d	q_s	1	p
1	0	$-\alpha_0$	$-\alpha_1$
0	1	$-\beta_0$	$-\beta_1$
1	-1	0	0

równanie pierwsze: tylko wektor $[1 \quad -1]^T \implies$ niepełny rząd, a więc brak identyfikowalności.

równanie drugie: tylko wektor $[1 \quad 1]^T \implies$ niepełny rząd, a więc brak identyfikowalności.

$$
\begin{aligned}
q_d &= \alpha_0 + \alpha_1 p + \color{red}{\alpha_2 z} + \varepsilon_d \\
q_s &= \beta_0 + \beta_1 p + \varepsilon_s \\
q_d &= q_s
\end{aligned}
$$

q_d	q_s	1	p	z
1	0	$-\alpha_0$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$
0	1	$-\beta_0$	$-\beta_1$	0
1	-1	0	0	0

$$
\begin{aligned}
q_d &= \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 z + \varepsilon_d \\
q_s &= \beta_0 + \beta_1 p + \varepsilon_s \\
q_d &= q_s
\end{aligned}
$$

q_d	q_s	1	p	z
1	0	$-\alpha_0$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$
0	1	$-\beta_0$	$-\beta_1$	0
1	-1	0	0	0

równanie pierwsze: tylko wektor $[1 \quad -1]^T$ $\implies$ niepełny rząd, a więc brak identyfikowalności.

$$
\begin{aligned}
q_d &= \alpha_0 + \alpha_1 p + \color{red}{\alpha_2 z} + \varepsilon_d \\
q_s &= \beta_0 + \beta_1 p + \varepsilon_s \\
q_d &= q_s
\end{aligned}
$$

q_d	q_s	1	p	z
1	0	$-\alpha_0$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$
0	1	$-\beta_0$	$-\beta_1$	0
1	-1	0	0	0

równanie pierwsze: tylko wektor $[1 \quad -1]^T \implies$ niepełny rząd, a więc brak identyfikowalności.

równanie drugie: dwa wektory $[1 \quad 1]^T$ oraz $[-\alpha_2 \quad 0]^T$. Co więcej,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$\implies$ parametry drugie równania identyfikowalne.

$$
\begin{aligned}
q_d &= \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 z + \varepsilon_d \\
q_s &= \beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 x + \varepsilon_s \\
q_d &= q_s
\end{aligned}
$$

q_d	q_s	1	p	z	x
1	0	$-\alpha_0$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	0
0	1	$-\beta_0$	$-\beta_1$	0	$-\beta_2$
1	-1	0	0	0	0

$$\begin{aligned} q_d &= \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 z + \varepsilon_d \\ q_s &= \beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 x + \varepsilon_s \\ q_d &= q_s \end{aligned}$$

q_d	q_s	1	p	z	x
1	0	$-\alpha_0$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	0
0	1	$-\beta_0$	$-\beta_1$	0	$-\beta_2$
1	-1	0	0	0	0

równanie pierwsze: dwa wektory wektor $[1 \quad -1]^T$ oraz $[-\beta_2 \quad 0]^T$. Ważniejsze, że

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$\Longrightarrow$ parametry pierwszego równania identyfikowalne.

$$
\begin{aligned}
q_d &= \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 z + \varepsilon_d \\
q_s &= \beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 x + \varepsilon_s \\
q_d &= q_s
\end{aligned}
$$

q_d	q_s	1	p	z	x
1	0	$-\alpha_0$	$-\alpha_1$	$-\alpha_2$	0
0	1	$-\beta_0$	$-\beta_1$	0	$-\beta_2$
1	-1	0	0	0	0

równanie pierwsze: dwa wektory wektor $[1 \quad -1]^T$ oraz $[-\beta_2 \quad 0]^T$. Ważniejsze, że

$$\text{rank}\begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$\Longrightarrow$ parametry pierwszego równania identyfikowalne.

równanie drugie: dwa wektory $[1 \quad 1]^T$ oraz $[-\alpha_2 \quad 0]^T$. Co więcej,

$$\text{rank}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$\Longrightarrow$ parametry drugie równania identyfikowalne.

Metody estymacji

Metody estymacji parametrów równań (równanie - po - równaniu)

- Pośrednia Metoda Najmniejszych Kwadratów;
- Podwójna Metoda Najmniejszych Kwadratów;
- Uogólniona Metoda Momentów (GMM, *generalized methods of moments*);
- Estymator klasy k;
- Metoda Największej Wiarygodności z ograniczoną informacją (LIML, *limited nformation likelihood*).

Metody estymacji parametrów równań (równanie - po - równaniu)

- Pośrednia Metoda Najmniejszych Kwadratów;
- Podwójna Metoda Najmniejszych Kwadratów;
- Uogólniona Metoda Momentów (GMM, *generalized methods of moments*);
- Estymator klasy k;
- Metoda Największej Wiarygodności z ograniczoną informacją (LIML, *limited nformation likelihood*).

Metody estymacji łącznej/systemowej

- Potrójna Metoda Najmniejszych Kwadratów;
- Uogólniona Metoda Momentów (GMM, *generalized methods of moments*);
- Metoda Największej Wiarygodności z pełną informacją (FIML, *full-information likelihood*).

- **Postać strukturalna dla j-tego równania:**

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_j &= \mathbf{Y}_j\gamma_j + \mathbf{X}_j\beta_j + \varepsilon_j \\ &= \mathbf{Z}_j\delta_j + \varepsilon_j \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{Z}_j$ to macierz zmiennych endogenicznych w j-tym równaniu oraz zmiennych egzogenicznych w j-tym równaniu, tj. $\mathbf{Z}_j = [\mathbf{Y}_j \quad \mathbf{X}_j]$.

- **Postać strukturalna dla j-tego równania:**

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_j &= \mathbf{Y}_j\gamma_j + \mathbf{X}_j\beta_j + \varepsilon_j \\ &= \mathbf{Z}_j\delta_j + \varepsilon_j \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{Z}_j$ to macierz zmiennych endogenicznych w j-tym równaniu oraz zmiennych egzogenicznych w j-tym równaniu, tj. $\mathbf{Z}_j = [\mathbf{Y}_j \quad \mathbf{X}_j]$.

- **Postać zredukowana dla zmiennych endogenicznych występujących w j-tym równaniu**

$$\mathbf{Y}_j = \Pi_j\mathbf{X}_j + \nu_j$$

gdzie Π_j to j-ta kolumna macierzy z postaci zredukowanej. A $\nu = \varepsilon\Gamma^{-1}$.

- **Postać strukturalna dla j-tego równania:**

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_j &= \mathbf{Y}_j\gamma_j + \mathbf{X}_j\beta_j + \varepsilon_j \\ &= \mathbf{Z}_j\delta_j + \varepsilon_j\end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{Z}_j$ to macierz zmiennych endogenicznych w j-tym równaniu oraz zmiennych egzogenicznych w j-tym równaniu, tj. $\mathbf{Z}_j = [\mathbf{Y}_j \quad \mathbf{X}_j]$.

- **Postać zredukowana dla zmiennych endogenicznych występujących w j-tym równaniu**

$$\mathbf{Y}_j = \Pi_j\mathbf{X}_j + \nu_j$$

gdzie Π_j to j-ta kolumna macierzy z postaci zredukowanej. A $\nu = \varepsilon\Gamma^{-1}$.

- **Estymator najmniejszej metody kwadratów będzie niezgodny:**

$$\hat{\delta}_j^{OLS} = \left[\mathbf{Z}_j^T\mathbf{Z}_j\right]^{-1}\mathbf{Z}_j^T\mathbf{y}_j = \delta_j + \begin{bmatrix}\mathbf{Y}_j^T\mathbf{Y}_j & \mathbf{Y}_j^T\mathbf{X}_j \\ \mathbf{X}_j^T\mathbf{Y}_j & \mathbf{X}_j^T\mathbf{X}_j\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_j^T\varepsilon_j \\ \mathbf{X}_j^T\varepsilon_j\end{bmatrix}$$

  - $\text{plim}\frac{1}{N}\mathbf{X}_j^T\varepsilon_j$ dąży do zera, ponieważ zmienne $\mathbf{X}_j$ są egzogeniczne.
  - Kluczowe jest tutaj komponent $\text{plim}\frac{1}{N}\mathbf{Y}_j^T\varepsilon_j$, który nie zbiega do 0 . Korelacja ta prowadzi do tzw. simultaneous equations bias.

Modele rekurencyjne

to modele, w których macierz Γ (określająca zależność między zmiennymi endogenicznymi w postaci strukturalnej) jest trójkątna.

Modele rekurencyjne

to modele, w których macierz Γ (określająca zależność między zmiennymi endogenicznymi w postaci strukturalnej) jest trójkątna.

Przykład (3 zmienne endogeniczne)

$$\begin{aligned} y_1 &= X\beta_1 & &+\varepsilon_1, \\ y_2 &= X\beta_2 + \gamma_{12}y_1 & &+\varepsilon_2, \\ y_3 &= X\beta_3 + \gamma_{13}y_1 + \gamma_{23}y_1 & &+\varepsilon_3. \end{aligned}$$

Modele rekurencyjne

to modele, w których macierz Γ (określająca zależność między zmiennymi endogenicznymi w postaci strukturalnej) jest trójkątna.

Przykład (3 zmienne endogeniczne)

$$\begin{aligned} y_1 &= X\beta_1 && +\varepsilon_1, \\ y_2 &= X\beta_2 + \gamma_{12} y_1 && +\varepsilon_2, \\ y_3 &= X\beta_3 + \gamma_{13} y_1 + \gamma_{23} y_1 && +\varepsilon_3. \end{aligned}$$

Modele w pełni rekurencyjne

to modele, w których macierz Γ jest trójkątna oraz Σ (macierz wariancji kowariancji składnika losowego) jest diagonalna.

Modele rekurencyjne

to modele, w których macierz Γ (określająca zależność między zmiennymi endogenicznymi w postaci strukturalnej) jest trójkątna.

Przykład (3 zmienne endogeniczne)

$$\begin{aligned} y_1 &= X\beta_1 && +\varepsilon_1, \\ y_2 &= X\beta_2 + \gamma_{12} y_1 && +\varepsilon_2, \\ y_3 &= X\beta_3 + \gamma_{13} y_1 + \gamma_{23} y_1 && +\varepsilon_3. \end{aligned}$$

Modele w pełni rekurencyjne

to modele, w których macierz Γ jest trójkątna oraz Σ (macierz wariancji kowariancji składnika losowego) jest diagonalna.

- W przypadku model w pełni rekurencyjnych, parametry postaci strukturalnej mogą być szacowane MNK.
- Wynika to z braku zależności między składnikiem losowym (ε) a zmiennymi endogenicznymi. Dla przykładu:

$$\mathrm{cov}\left(y_1, \varepsilon_2\right) = \mathrm{cov}\left(X\beta_1 + \varepsilon_1, \varepsilon_2\right) = 0$$

Modele rekurencyjne

to modele, w których macierz Γ (określająca zależność między zmiennymi endogenicznymi w postaci strukturalnej) jest trójkątna.

Przykład (3 zmienne endogeniczne)

$$\begin{aligned} y_1 &= X\beta_1 && +\varepsilon_1, \\ y_2 &= X\beta_2 + \gamma_{12} y_1 && +\varepsilon_2, \\ y_3 &= X\beta_3 + \gamma_{13} y_1 + \gamma_{23} y_1 && +\varepsilon_3. \end{aligned}$$

Modele w pełni rekurencyjne

to modele, w których macierz Γ jest trójkątna oraz Σ (macierz wariancji kowariancji składnika losowego) jest diagonalna.

- W przypadku model w pełni rekurencyjnych, parametry postaci strukturalnej mogą być szacowane MNK.
- Wynika to z braku zależności między składnikiem losowym (ε) a zmiennymi endogenicznymi. Dla przykładu:

$$\operatorname{cov}(y_1, \varepsilon_2) = \operatorname{cov}(X\beta_1 + \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$$

- **Pośrednia Metoda Najmniejszych Kwadratów (*indirect least squares ILS*)** polega na oszacowaniu parametrów postaci zredukowanej:

$$\mathbf{Y} = \Pi \mathbf{X} + \nu \tag{26}$$

Klasyczną metodą najmniejszych kwadratów:

$$\hat{\Pi}^{OLS} = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \tag{27}$$

- Na podstawie oszacowań $\hat{\Pi}^{OLS}$ można wyznaczyć oszacowania punktowe postaci strukturalnej, tj. $\hat{\Gamma}^{ILS}$ oraz $\hat{\mathbf{B}}^{ILS}$.
- Jest to możliwe jedynie w przypadku dokładnej identyfikowalności każdego z równań.

- **Podwójna Metoda Najmniejszych Kwadratów (*two-stage least squares 2SLS*)** polega na wykorzystaniu wszystkich zmiennych egzogenicznych $\mathbf{X}$ jako instrumentów dla zmiennych egzogenicznych $\mathbf{Y}_j$ w j-tym równaniu.
- **[Krok #1]** Regresja(e) zmiennych endognenicznych występujących po prawej stronie równania j ($\mathbf{Y}_j$) względem wszystkich zmiennych egzogenicznych.
 $\Longrightarrow$ Obliczamy wartości teoretyczne $\hat{\mathbf{Y}}_j$.
- **[Krok #2]** Regresja $\mathbf{y}_j$ względem $\hat{\mathbf{Y}}_j$. oraz $\mathbf{X}_j$.
  - Powyższa strategią ilustruje warunek konieczny identyfikowalności (*order condition*). Przypomnijmy:
  $$K_j^* \geq M_j.$$
  - W przeciwnym przypadku liczba zmienny egogenicznych pominiętych w j tym warunku jest większa od liczby zmiennych endogenicznych. Wtedy macierz zmiennych objaśnających w drugim kroku, a więc $\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j & \mathbf{X}_j \end{bmatrix}$ ma niepełny rząd.

- Estymator 2SLS dla parametrów j-tego równania wykorzystujący wartości teoretyczne z pierwszego kroku ($\hat{\mathbf{Y}}_j$):

$$\hat{\delta}_j^{2SLS} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j^T \mathbf{Y}_j & \hat{\mathbf{Y}}_j^T \mathbf{X}_j \\ \mathbf{X}_j^T \mathbf{Y}_j & \mathbf{X}_j^T \mathbf{X}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j^T \mathbf{y}_j \\ \mathbf{X}_j^T \mathbf{y}_j \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Po pewnych przekształceniach można uzyskać następującą postać estymatora 2SLS:

$$\hat{\delta}_j^{2SLS} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j^T \hat{\mathbf{Y}}_j & \hat{\mathbf{Y}}_j^T \mathbf{X}_j \\ \mathbf{X}_j^T \hat{\mathbf{Y}}_j & \mathbf{X}_j^T \mathbf{X}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j^T \mathbf{y}_j \\ \mathbf{X}_j^T \mathbf{y}_j \end{bmatrix}. \tag{29}$$

- Asymptotyczna wariancja:

$$Var\left(\hat{\delta}_j^{2SLS}\right) = \hat{\sigma}_{jj} \left[\hat{\mathbf{Z}}_j^T \hat{\mathbf{Z}}_j\right]^{-1}, \tag{30}$$

gdzie macierz $\mathbf{Z}_j$ to macierz zmiennych w j-tym równaniu. Z kolei, szacowana zmienność składnika losowego:

$$\hat{\sigma}_{jj} = \frac{\left(\mathbf{y}_j - \mathbf{Z}_j \hat{\delta}_j^{2SLS}\right)^T \left(\mathbf{y}_j - \mathbf{Z}_j \hat{\delta}_j^{2SLS}\right)}{N}, \tag{31}$$

zależy od obserwacji ($\mathbf{Z}_j$) a nie od $\hat{\mathbf{Z}}_j$

- **Potrójna Metoda Najmniejszych Kwadratów (*three-stage least squares 3SLS*)** jest metodą polegającą na **jednoczesnej** estymacji parametrów modelu wielorównaniowego.
- Idea polega na połączeniu:
  - Podwójnej Metody Najmniejszych Kwadratów dla każdego równania,
  - Estymatora GLS (Uogólnionej Metody Najmniejszych Kwadratów), który uwzględnia **korelację składnika losowego pomiędzy równaniami**.

Zapis ogólny:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\delta + \varepsilon, \tag{32}$$

Zapis macierzowy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Z}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_M \end{bmatrix}, \tag{33}$$

gdzie $\mathbf{Z}_i$ to zmienne (endogeniczne i egzogeniczne) w i -tym równaniu, a $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_M$ to wektory składników losowych.

- Standardowe założenia:
  - $\mathbb{E}(\varepsilon|\mathbf{X}) = 0$
  - $\mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon^T|\mathbf{X}) = \bar{\Sigma} = \Sigma \otimes I$, gdzie I to macierz jednostkowa o wymiarach równych liczbie obserwacji.
- Macierz kowariancji:

$$\Sigma \otimes I = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{1M}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2M}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{M1}^2 & \sigma_{M2}^2 & \dots & \sigma_{MM}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

a więc ...

$$\Sigma \otimes I = \begin{bmatrix}
\sigma_{11}^2 & & & & \sigma_{12}^2 & & & & \cdots & \sigma_{1M}^2 & & & \\
& \sigma_{11}^2 & & & & \sigma_{12}^2 & & & \cdots & & \sigma_{1M}^2 & & \\
& & \ddots & & & & \ddots & & \cdots & & & \ddots & \\
& & & \sigma_{11}^2 & & & & \sigma_{12}^2 & \cdots & & & & \sigma_{1M}^2 \\
\sigma_{21}^2 & & & & \sigma_{22}^2 & & & & \cdots & \sigma_{2M}^2 & & & \\
& \sigma_{21}^2 & & & & \sigma_{22}^2 & & & \cdots & & \sigma_{2M}^2 & & \\
& & \ddots & & & & \ddots & & \cdots & & & \ddots & \\
& & & \sigma_{21}^2 & & & & \sigma_{22}^2 & \cdots & & & & \sigma_{2M}^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\sigma_{M1}^2 & & & & \sigma_{M2}^2 & & & & \cdots & \sigma_{MM}^2 & & & \\
& \sigma_{M1}^2 & & & & \sigma_{M2}^2 & & & \cdots & & \sigma_{MM}^2 & & \\
& & \ddots & & & & \ddots & & \cdots & & & \ddots & \\
& & & \sigma_{M1}^2 & & & & \sigma_{M2}^2 & \cdots & & & & \sigma_{MM}^2
\end{bmatrix}$$

- **Krok pierwszy** w 3SLS polega na oszacowaniu macierzy parametrów formy zredukowanej, tj. Π. Parametry Π są szacowane metodą najmniejszych kwadratów dla każdego z równań.
    - Dzięki tym oszacowaniom obliczanone mogą zaostać wartości teoretyczne zmiennych endogenicznych dla każdego z równań, tj. $\hat{\mathbf{Y}}_j$.
- **Krok drugi** w 3SLS to oszacowanie 2SLS (podwójnej metody najmniejszych kwadrató wektora parametrów dla każdego z równań, tj. $\hat{\delta}_j^{2SLS}$. Na podstawie, uzyskanych oszacowań $\hat{\delta}_j^{2SLS}$ wyznaczana jest macierz wariancji kowariancji, uwzględniająca zależność składnika losowego pomiędzy równiami. Estymator kowariancji pomiędzy i-tym a j-tym równaniem:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\left(\mathbf{y}_i - \mathbf{Z}_i\hat{\delta}_i^{2SLS}\right)^T\left(\mathbf{y}_i - \mathbf{Z}_j\hat{\delta}_j^{2SLS}\right)}{N}, \tag{35}$$

- **Krok trzeci** w 3SLS to wykorzystanie estymatora uogólnionej metody najmniejszych kwadratów GLS. Na podstawie szacunków:
    - $\hat{\mathbf{Y}}_j$, a więc $\hat{\mathbf{Z}}$ (pierwszy krok);
    - macierzy warianacji-kowariancji składnika losowego $\hat{\Sigma}$ (drugi krok);

możemy wyznaczyć estymator **Potrójnej Metody Najmniejszych Kwadratów** $\hat{\delta}^{3SLS}$:

$$\hat{\delta}^{3SLS} = \left[\hat{\mathbf{Z}}^T\left(\Sigma^{-1}\otimes I\right)\hat{\mathbf{Z}}\right]^{-1}\hat{\mathbf{Z}}^T\left(\Sigma^{-1}\otimes I\right)\mathbf{y}. \tag{36}$$

- Wariancja estymatora $\hat{\delta}^{3SLS}$:

$$Var(\hat{\delta}^{3SLS}) = \left[\bar{\mathbf{Z}}^T \left(\Sigma^{-1} \otimes I\right) \bar{\mathbf{Z}}\right]^{-1}, \tag{37}$$

gdzie $\bar{\mathbf{Z}} = \mathrm{diag}[\mathbf{X}\Pi_j, \quad \mathbf{X}]$.

Dynamiczne modele wielorównaniowe

- **Strukturalne modele dynamiczne** (alternatywny zapis uwzględniający indeks obserwacji t, $'$ oznacza transpozycję):

$$\mathbf{y_t'}\Gamma + \mathbf{x_t'}\mathbf{B} + \mathbf{y_{t-1}'}\Phi = \varepsilon', \tag{38}$$

  gdzie $\mathbf{y_{t-1}'}$ to wektor opóźnionych zmiennych endogenicznych.
  Macierz Φ wyraża zależność pomiedzy $\mathbf{y_{t-1}'}$ oraz $\mathbf{y_t'}$.
- Opóźnione zmienne endogeniczne $\mathbf{y_{t-1}'}$ są predeterminowane (*predetermined*).
- W analizie problemu identyfikowalności $\mathbf{y_{t-1}'}$ można zatem traktować jako zmienne egzogeniczne w tym przypadku.

- **Strukturalne modele dynamiczne** (alternatywny zapis uwzględniający indeks obserwacji t, $'$ oznacza transpozycję):

$$\mathbf{y_t'}\Gamma + \mathbf{x_t'}\mathbf{B} + \mathbf{y_{t-1}'}\Phi = \varepsilon', \tag{38}$$

  gdzie $\mathbf{y_{t-1}'}$ to wektor opóźnionych zmiennych endogenicznych.
  Macierz Φ wyraża zależność pomiedzy $\mathbf{y_{t-1}'}$ oraz $\mathbf{y_t'}$.
- Opóźnione zmienne endogeniczne $\mathbf{y_{t-1}'}$ są predeterminowane (*predetermined*).
- W analizie problemu identyfikowalności $\mathbf{y_{t-1}'}$ można zatem traktować jako zmienne egzogeniczne w tym przypadku.
- Większą liczbę opóźnień można uwzględnić przez dodatkowe równania systemu.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y_t} & \mathbf{y_{t-1}}\end{bmatrix}' \begin{bmatrix}\Gamma & 0 \\ 0 & I\end{bmatrix} + \mathbf{x_t}\begin{bmatrix}\mathbf{B} & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{y_{t-1}} & \mathbf{y_{t-2}}\end{bmatrix}' \begin{bmatrix}\Phi_1 & I \\ \Phi_2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varepsilon_t' & 0\end{bmatrix}. \tag{39}$$

- **Postać zredukowana** dynamicznego modelu wielorównaniowego:

$$\mathbf{y}'_{\mathbf{t}} = \mathbf{x}'_{\mathbf{t}}\Pi + \mathbf{y}'_{\mathbf{t-1}}\Xi + \nu'_{\mathbf{t}}, \tag{40}$$

gdzie:

$$\Xi = -\Phi\Gamma^{-1}, \tag{41}$$
$$\Pi = -\mathbf{B}\Gamma^{-1}, \tag{42}$$
$$\nu'_t = \nu'_t\Gamma^{-1}. \tag{43}$$

- **Postać zredukowana** dynamicznego modelu wielorównaniowego:

$$\mathbf{y}_\mathbf{t}' = \mathbf{x}_\mathbf{t}'\Pi + \mathbf{y}_{\mathbf{t-1}}'\Xi + \nu_\mathbf{t}'. \tag{44}$$

- **Mnożnik jednoczesny/ krótkookresowy/bezpośredni:** zmiennej k-tej egzogenicznej na m-tą zmienną endogeniczną.

$$\frac{\partial y_{t,m}}{\partial x_{t,k}} = \Pi_{k,m}, \tag{45}$$

to po prostu odpowiedni element macierzy określającej bezpośredni wpływ zmiennych egzogenicznych na zmienne endogeniczne w postaci zredukowanej.

- **Postać zredukowana** dynamicznego modelu wielorównaniowego:

$$\mathbf{y_t'} = \mathbf{x_t'}\Pi + \mathbf{y_{t-1}'}\Xi + \nu_\mathbf{t}'. \tag{46}$$

- Substytucja $\mathbf{y_{t-1}'}$ przez zależność wynikającą z postaci zredukowanej (tj. $\mathbf{y_{t-1}'} = \mathbf{x_{t-1}'}\Pi + \mathbf{y_{t-2}'}\Xi + \nu_\mathbf{t-1}'$):

$$\mathbf{y_t'} = \mathbf{x_t'}\Pi + \mathbf{x_{t-1}'}\Pi\Xi + \mathbf{y_{t-2}'}\Xi^2 + \nu_\mathbf{t}' + \nu_\mathbf{t-1}'\Xi, \tag{47}$$

- Kontynuując dla kolejnych opóźnień (oznaczanych przez s):

$$\mathbf{y_t'} = \sum_{s=0}^{t-1}\left(\mathbf{x_{t-s}'}\Pi\Xi^s\right) + \mathbf{y_0'}\Xi^t + \sum_{s=0}^{t-1}\left(\nu_{t-s}'\Xi^s\right), \tag{48}$$

gdzie $\mathbf{y_0'}$ to początkowe wartości zmiennych endogenicznych.

- **Postać zredukowana** dynamicznego modelu wielorównaniowego:

$$\mathbf{y}_\mathbf{t}' = \mathbf{x}_\mathbf{t}'\Pi + \mathbf{y}_\mathbf{t-1}'\Xi + \nu_\mathbf{t}'. \tag{46}$$

- Substytucja $\mathbf{y}_\mathbf{t-1}'$ przez zależność wynikającą z postaci zredukowanej (tj. $\mathbf{y}_\mathbf{t-1}' = \mathbf{x}_\mathbf{t-1}'\Pi + \mathbf{y}_\mathbf{t-2}'\Xi + \nu_\mathbf{t-1}'$):

$$\mathbf{y}_\mathbf{t}' = \mathbf{x}_\mathbf{t}'\Pi + \mathbf{x}_\mathbf{t-1}'\Pi\Xi + \mathbf{y}_\mathbf{t-2}'\Xi^2 + \nu_\mathbf{t}' + \nu_\mathbf{t-1}'\Xi, \tag{47}$$

- Kontynuując dla kolejnych opóźnień (oznaczanych przez s):

$$\mathbf{y}_\mathbf{t}' = \sum_{s=0}^{t-1}\left(\mathbf{x}_\mathbf{t-s}'\Pi\Xi^s\right) + \mathbf{y}_\mathbf{0}'\Xi^t + \sum_{s=0}^{t-1}\left(\nu_{t-s}'\Xi^s\right), \tag{48}$$

gdzie $\mathbf{y}_\mathbf{0}'$ to początkowe wartości zmiennych endogenicznych.

- **Dynamiczny mnożnik:**

$$\frac{\partial y_{t,m}}{\partial x_{t-s,k}} = \left(\Pi\Xi^s\right)_{k,m} \tag{49}$$

pozwala ocenić wpływ zmiany $k-tej$ zmiennej egzogenicznej na m-tą zmienną endogeniczną po s okresach.

- **Postać końcowa modelu:**

$$\mathbf{y}'_{\mathbf{t}} = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\mathbf{x}'_{\mathbf{t-s}} \Pi \Xi^{s} \right) + \sum_{s=0}^{\infty} \left(\nu'_{t-s} \Xi^{s} \right), \tag{50}$$

pozwala wyrazić zmienne endogeniczne jako sumę skumulowanych zmian zmiennych egzogenicznych oraz zaburzeń strukturalnych.

- **Postać końcowa modelu:**

$$\mathbf{y}'_{\mathbf{t}} = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\mathbf{x}'_{\mathbf{t-s}} \Pi \Xi^s \right) + \sum_{s=0}^{\infty} \left(\nu'_{t-s} \Xi^s \right), \tag{50}$$

pozwala wyrazić zmienne endogeniczne jako sumę skumulowanych zmian zmiennych egzogenicznych oraz zaburzeń strukturalnych.

- **Możniki długookresowe (równowagowe):**

$$\Pi \left[I + \Xi + \Xi^2 + \ldots \right] = \Pi \left[I - \Xi \right]^{-1} \tag{51}$$

określają łączny (skumulowany) wpływ zmian zmiennych egzogenicznych na zmienne endogeniczne.

- W przypadku mnożników długookresowych kluczowa jest stabilność, tj. $\lim_{t \to \infty} \Xi^t = 0$.

- **Postać końcowa modelu:**

$$\mathbf{y}'_{\mathbf{t}} = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\mathbf{x}'_{\mathbf{t-s}} \Pi \Xi^s \right) + \sum_{s=0}^{\infty} \left(\nu'_{t-s} \Xi^s \right), \tag{50}$$

pozwala wyrazić zmienne endogeniczne jako sumę skumulowanych zmian zmiennych egzogenicznych oraz zaburzeń strukturalnych.

- **Możniki długookresowe (równowagowe):**

$$\Pi \left[I + \Xi + \Xi^2 + \ldots \right] = \Pi \left[I - \Xi \right]^{-1} \tag{51}$$

określają łączny (skumulowany) wpływ zmian zmiennych egzogenicznych na zmienne endogeniczne.

- W przypadku mnożników długookresowych kluczowa jest stabilność, tj. $\lim_{t\to\infty} \Xi^t = 0$.
- **Skumulowane dynamiczne mnożniki:**

$$\Pi \left[I - \Xi \right]^{-1} \left[I - \Xi^s \right],$$

gdzie s jest horyzontem analizy.

- **Stabilność** jest kluczową charakterystyką dynamicznych modeli wielorównaniowych.
    - Stabilność oznacza, że wpływ zmian zmiennych egzogenicznych na zmienne endogeniczne będzie wygasał w czasie.

- **Stabilność** jest kluczową charakterystyką dynamicznych modeli wielorównaniowych.
  - Stabilność oznacza, że wpływ zmian zmiennych egzogenicznych na zmienne endogeniczne będzie wygasał w czasie.
- Wykorzystując dekompozycję spektralną macierzy Ξ (opisującą zależność między zmiennymi endogenicznymi a ich opóźnieniami):

$$\Xi = C\Lambda C^{-1}, \tag{52}$$

gdzie Λ to macierz diagonalna z wartościami własnymi na przekątnej, a C to macierz zawierająca wektory wkłasne.

- **Stabilność** jest kluczową charakterystyką dynamicznych modeli wielorównaniowych.
  - Stabilność oznacza, że wpływ zmian zmiennych egzogenicznych na zmienne endogeniczne będzie wygasał w czasie.
- Wykorzystując dekompozycję spektralną macierzy Ξ (opisującą zależność między zmiennymi endogenicznymi a ich opóźnieniami):

$$\Xi = C\Lambda C^{-1}, \tag{52}$$

gdzie Λ to macierz diagonalna z wartościami własnymi na przekątnej, a C to macierz zawierająca wektory wkłasne.

- Warto zauważyć, że:

$$\Xi^2 = C\Lambda C^{-1} C\Lambda C^{-1} = C\Lambda^2 C^{-1}, \tag{53}$$

a więc

$$\Xi^t = C\Lambda^t C^{-1}, \tag{54}$$

zatem stabilność ($\lim_{t\to\infty} \Xi^t = 0$) jest zagwarantowana jeżeli $\lim_{t\to\infty} \Lambda^t = 0$. W powyższy przypadku jest to tożsame z sytuacją, gdy moduł wartości własnych (elementy diagonalne Λ) jest mniejszy od jedności.