Metody Ekonometryczne
Goodness of fit i wprowadzenie do wnioskowania statystycznego

Jakub Mućk
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Estymator MNK

- Dla jednorównaniowego modelu liniowego:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon, \tag{1}$$

estymator MNK (OLS) przyjmuję postać:

$$\hat{\beta}^{OLS} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}. \tag{2}$$

- Estymator wariancji-kowariancji można zapisać jako:

$$Var(\hat{\beta}^{OLS}) = \mathbb{S}_{\varepsilon}^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}, \tag{3}$$

gdzie wariancja składnika losowego można oszacować jako $\mathbb{S}_{\varepsilon}^2$:

$$\mathbb{S}_{\epsilon}^2 = \frac{e^Te}{n-(k+1)} = \frac{SSE(\hat{\beta}^{OLS})}{df} \tag{4}$$

gdzie $SSE(\hat{\beta}^{OLS})$ to suma kwadratów reszt, a df to **liczba stopni swobody**.

Założenia:

1. $rz(\mathbf{X}) = k + 1 \leq n$
2. $\mathbb{E}(\mathbf{X}\varepsilon) = 0$
3. $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$
4. $Var(\varepsilon) = \mathbb{E}(\varepsilon\varepsilon^T) = I\sigma^2$
5. $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

Twierdzenie Gaussa - Markowa

Estymator $\hat{\beta}$ uzyskany Klasyczną Metodą Najmniejszych Kwadratów jest estymatorem **BLUE** [*best linear unbiased estimator*], tj. zgodnym, nieobciążonym i najefektywniejszy w klasie liniowych estymatorów wektora β.

- nieobciążoność, czyli: $\mathbb{E}(\hat{\beta}^{OLS}) = \beta$
- najefektywniejszy, czyli posiadający najmniejszą wariancję w swojej klasie
- zgodny, czyli: $\text{plim}_{n\to\infty}\hat{\beta}_n^{OLS} = \beta$.

Goodness-of-fit

- **Miary dopasowania (*goodness-of-fit*)** pozwalają ocenić stopień dopasowania wartości teoretycznych wynikających z oszacowań modelu ekonometrycznego do danych empirycznych.
- **Miary dopasowania (*goodness-of-fit*)** **nie stanowią formalnego kryterium jakości modelu.**
- Przykładowe miary dopasowania dla jednorównaniowego liniowego modelu ekonometrycznego:
  - R^2,
  - skorygowany $\bar{R}^2$,
  - kryteria informacyjne.

- Współczynnik determinacji R^2 jest wynikiem dekompozycji **łącznej obserwowanej wariancji/zmienności SST (*total variance*).**:

$$SST = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 = (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \tag{5}$$

gdzie $\bar{y}$ ($\bar{\mathbf{y}}$) to średnia wartość (wektor z średnią wartością).

- Punktem wyjścia jest *liniowy* model:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon, \tag{6}$$

- oszacowania parametrów β pozwalają wyznaczyć wartości teoretyczne ($\hat{\mathbf{y}}$) oraz reszty ($\hat{\mathbf{e}}$):

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\hat{\beta} + \hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{e}}. \tag{7}$$

- Wykorzystując powyższy fakt i definicje łącznej wariancji/zmienności (SST):

$$SST = (\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{y}})^T (\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{y}}) = (\hat{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}})^T (\hat{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}) + \hat{\mathbf{e}}^T\hat{\mathbf{e}} + 2(\hat{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}})^T \hat{\mathbf{e}} \tag{8}$$

- $(\hat{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}})^T (\hat{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}})$ to łączna zmienność wartości teoretycznych (SSR), tj. wynikających z oszacowań oraz zmienności zmiennych objaśniających.
- Jeżeli modeli liniowy zawiera wyraz wolny to wtedy $(\hat{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}})^T \hat{\mathbf{e}} = 0$.
- $\hat{\mathbf{e}}^T\hat{\mathbf{e}}$ to suma kwadratów reszt (SSE). Ostatecznie:

$$\underbrace{SST}_{\text{Total}} = \underbrace{SSR}_{\text{Regression}} + \underbrace{SSE}_{\text{Errors}}. \tag{9}$$

Współczynnik determinacji R^2 II

- **Współczynnik determinacji** R^2 stanowi zatem relację **zmienności wyjaśnionej (SSE)** do **zmienności łącznej (SST)** :

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{N} (y - \bar{y})^2}, \tag{10}$$

a z dekompozycji łącznej wariancji (SST) może zostać wyrażony prrzy pomocy **zmienności reszt**:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}. \tag{11}$$

- Charaterystyki R^2:
  - $R^2 \in (0, 1)$
  - R^2 faworyzuje modele z większą liczbą zmiennych egzogenicznych
  - konstrukcja R^2 opiera się o uwzględnienie wyrazu wolnego w modelu.

Niescentrowany współczynnik R_N^2

- W przypadku, gdy w specyfikacji modelu ekonometrycznego nie uwzględniono wyrazu wolnego, współczynnik R^2 może przyjmować wartości powyżej jedności.
- Rozwiązaniem tego problemu jest niescentrowany R_N^2:

$$R_N^2 = 1 - \frac{\mathbf{e}\mathbf{e}^T}{\mathbf{y}\mathbf{y}^T} \tag{12}$$

  - $\mathbf{e}$ - wektor reszt.
  - $\mathbf{y}$ - wektor obserwacji zmiennej endogenicznej.
  - W porównaniu ze standardowym R^2 obserwowana zmienność nie jest zcentrowana wokół wartości średniej, tj. $\mathbf{y}\mathbf{y}^T$.
- $R_N^2 \in < 0, 1 >$
- Interpretacja: większa wartość R_N^2 oznacza większa rola zmiennych egzogenicznych w wyjaśnianiu zmienności zmiennej objaśnianej.

- Współczynnik determinacji R^2 **zawsze będzie faworyzował modele z większą liczbą zmiennych.**
- W porównaniu z podstawowym współczynnikiem R^2, **skorygowany współczynnik $\bar{R}^2$** uwzględnia również **liczbę stopni swobody**:

$$\bar{R}^2 = R^2 - \frac{k}{n-(k+1)}(1-R^2) \tag{13}$$

- Skorygowany współczynnik R^2 przyjmuje zazwyczaj niższe wartości:

$$\bar{R}^2 \leq R^2 \tag{14}$$

  w szczególności możliwe jest przyjmowanie wartości poniżej 0.
- Skorygowany $\bar{R}^2$ jest **pozbawiony standardowej interpretacji**.

- **Kryterium Akaike'a (AIC)** jest miernikiem, który uwzględnia zarówno dopasowanie do obserwacji (funkcja wiarygodności) oraz liczbę stopni swobody:

$$AIC = \underbrace{\ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i^2}_{\text{funkcja wiarygodności}} + \underbrace{\frac{2(k+1)}{n}}_{\text{liczba stopni swobody}} \tag{15}$$

gdzie n to liczba obserwacji, $k+1$ to liczba oszacowanych parametrów oraz e_i to reszta dla i-tej obserwacji.

- **Bayesowskie kryterium Schwarza (BIC)** jest miernikiem, który uwzględnia zarówno dopasowanie do obserwacji (funkcja wiarygodności) oraz liczbę stopni swobody:

$$BIC = \underbrace{\ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i^2}_{\text{funkcja wiarygodności}} + \underbrace{\frac{(k+1)\ln(n)}{n}}_{\text{liczba stopni swobody}} \tag{16}$$

gdzie oznaczenia jak w przypadku AIC.

- Kryteria AIC i BIC maleją wraz ze wzrostem funkcji wiarygności oraz rosną wraz ze wzrostem liczby parametrów.
- Kryteria AIC i BIC nie posiadają interpretacji i są wykorzystywane do porównania dopasowania modeli.

Miernik	Opis
R^2	Ogólny miernik, interpretacja, rośnie wraz z liczbą zmiennych
Niescentrowany R^2	model bez wyrazu wolnego
Skorygowany R^2	uwzględnia *korektę* na liczbę zmiennych, porównanie modeli
Kryterium AIC	uwzględnia *korektę* na liczbę zmiennych, porównanie modeli
Kryterium BIC	uwzględnia *korektę* na liczbę zmiennych, porównanie modeli; $BIC < AIC$

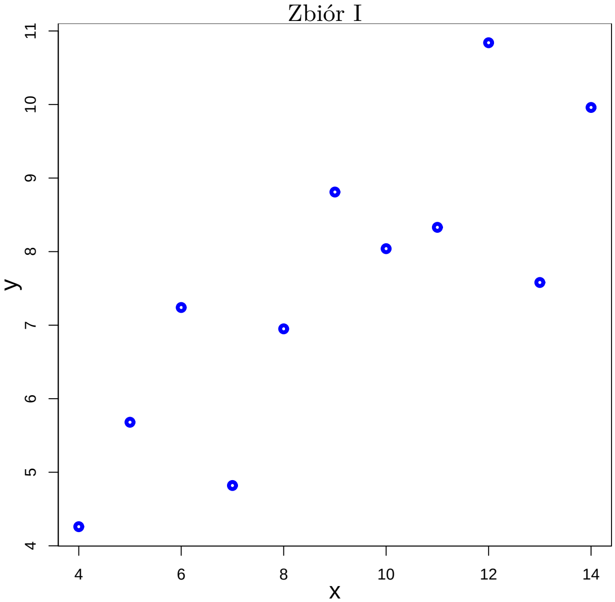
Powyższe mierniki kwantyfikują jedynie dopasowanie modelu do obserwowanych danych. Wspomniane dopasowanie do danych ma charekter informacyjny i nie stanowi głównego kryterium w wyborze modelu.

- Kwartet Anscombe'a to przykład **czterech** zbiorów danych z dwoma zmiennymi x i y.
- Średnia x: 9.
- Średnia y: 4.1.
- Wariancja y: 7.5,
- Wariancja x: 11.
- Współczynnik korelacji: 0.816
- Równanie regresji z oszacowanymi parametrami:

$$y = 3 + .5x, \tag{17}$$

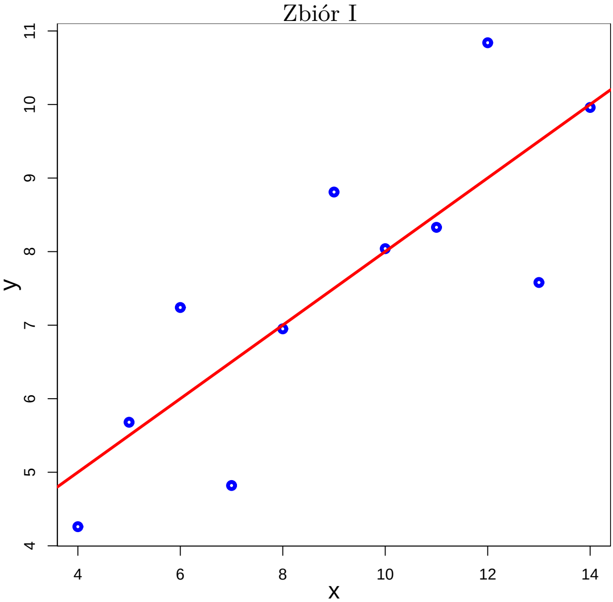
a R^2 wynosi 0.63.

Przykład: kwartet Anscombe'a

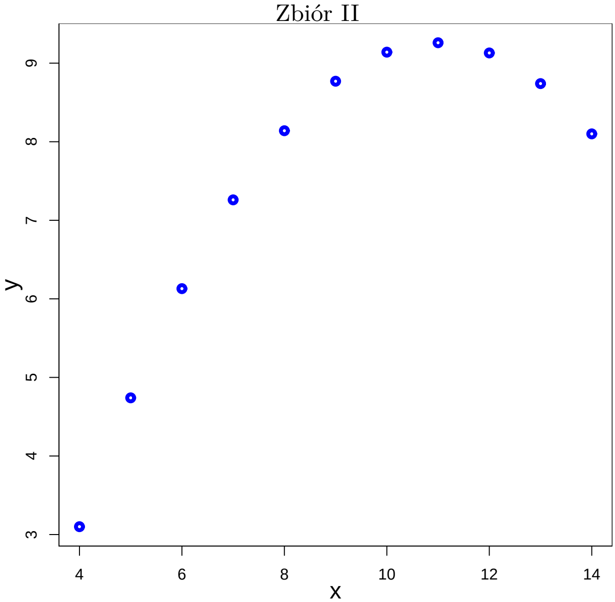


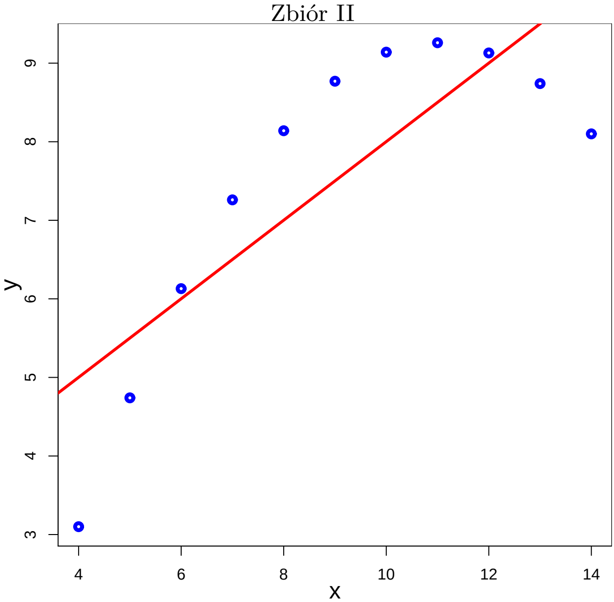
Przykład: kwartet Anscombe'a

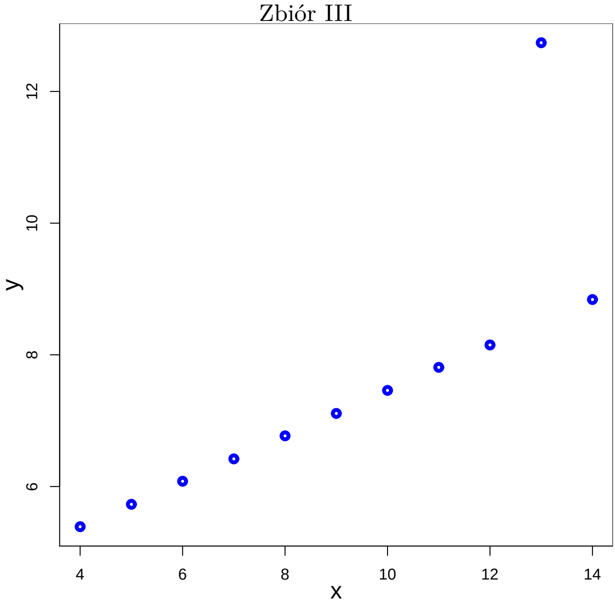
SGH



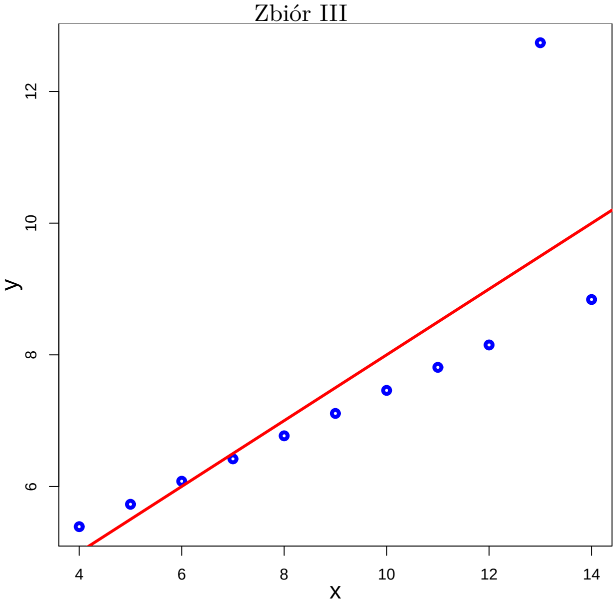
Przykład: kwartet Anscombe'a

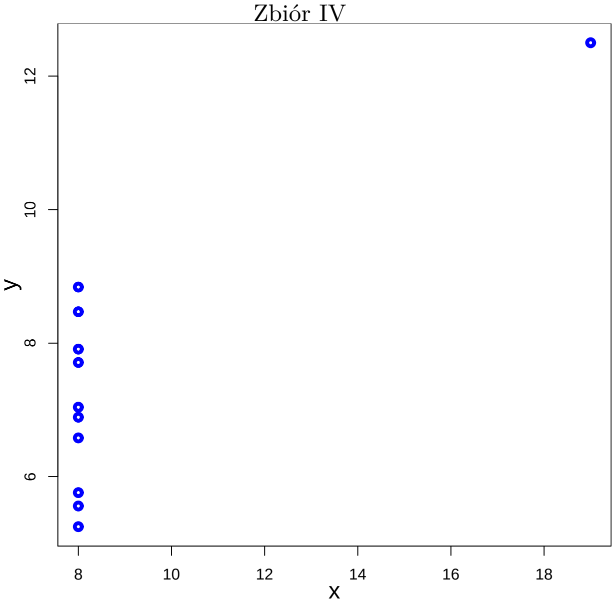



Zbiór II
y
3
4
5
6
7
8
9
x
4
6
8
10
12
14


Zbiór III
y
12
10
8
6
x
4
6
8
10
12
14

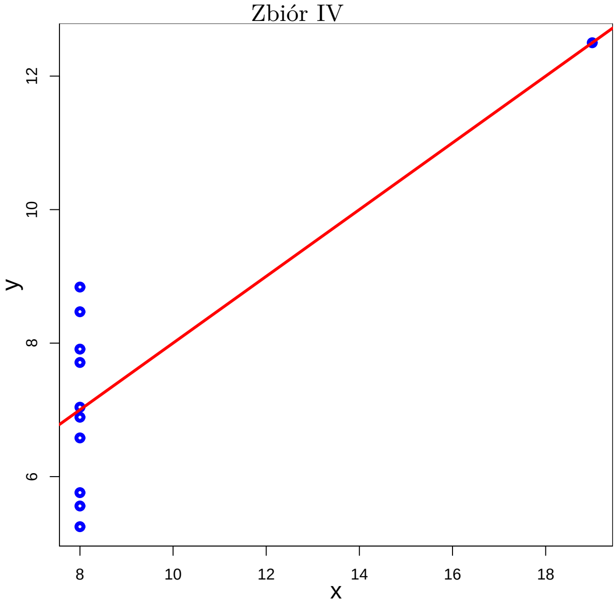
Przykład: kwartet Anscombe'a




Zbiór IV
y
12
10
8
6
x
8
10
12
14
16
18

Przykład: kwartet Anscombe'a

SGH



Wnioskowanie statystyczne

- **Wnioskowanie statystyczne (*statistical inference*)** pozwala na generalizację wyników estymacji pewnych cahrakterystyk uzsykanych na podstawie całej próby na całą populację.
- **Wnioskowanie statystyczne** obejmuje:
  - Estymację nieznanych parametrów.
    - Estymacja parametryczna $\Longrightarrow$ bazuje na założeniu o rozkładzie prawdopodobieństwa.
    - Estymacja nieparametryczna $\Longrightarrow$ brak założeń o rozkładzie prawdopodbieństwa.
    - Estymacja semiparametryczna.
  - Weryfikację hipotez statystycznych.
- **Wnioskowanie statystyczne** można oprzeć m.in na:
  - Podejściu częstościowym.
  - Podejściu bayesowskim.

- Zgodnie z zasadami wnioskowania statystycznego można wyróżnić dwa ryzyka wynikające z wykorzystania testów statystycznych, których konstrukcja opiera się na klarownie sformułowanych hipotezach: **zerowej ($\mathcal{H}_0$)** oraz **alternatywnej ($\mathcal{H}_1$)**:

Błąd pierwszego rodzaju

to **odrzucenie** $\mathcal{H}_0$, która w rzeczywistości jest **prawdziwa**.

Błąd drugiego rodzaju

to **przyjęcie** $\mathcal{H}_0$, która w rzeczywistości jest **fałszywa**.

- Rozmiar testu (*size of test*) to prawdopodobieństwo (błędnego) odrzucenia hipotezy zerowej jeżeli jest ona prawdziwa.

$$\alpha = Pr\left(\text{odrzucenie} \quad \mathcal{H}_0 | \mathcal{H}_0\right) \tag{18}$$

  - Rozmiar testu to inaczej prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju.
- Moc testu (*power of test*) to prawdopodobieństwo (poprawnego) odrzucenia hipotezy zerowej jeżeli prawdziwa jest hipoteza alternatywna.

$$\beta = Pr\left(\text{odrzucenie} \quad \mathcal{H}_0 | \mathcal{H}_1\right) \tag{19}$$

  - Moc testu to inaczej dopełnienie prawdopodobieństwa popełnienia błędu II rodzaju.

- W pakietach ekonometryczno-statystycznych szeroko stosowane jest **p-value (probability value)**, które mierzy **prawdopobieństwo błędu pierwszego rodzaju**.
- W praktyce ekonometrycznej nie rozważa się minimalizacji obu ryzyk i wnioskowanie statystyczne jest najczęściej przeprowadzane na podstawie analizy prawdopodobieństw błędu pierwszego rodzaju.
- **Poziom krytyczny** oznacza arbitralnie wybrany poziom prawdopodobieństwa błędu I rodzaju, który można uznać za akceptowalny. Najczęściej jest równy: 0.01, 0.05 lub 0.1.

Statystyczna istotność oszacowań

- Test t-studenta pozwala zweryfikować istotność oszacowania parametru dla każdej zmiennej objaśniającej (x_j) osobno, tj.:

$$\mathcal{H}_0 : \beta_j = 0 \qquad \mathcal{H}_1 : \beta_j \neq 0 \tag{20}$$

- Statystyka testowa:

$$t_j = \frac{\hat{\beta}_j}{\mathbb{S}(\hat{\beta}_i)} \tag{21}$$

gdzie $\hat{\beta}_j$ to oszacowanie punktowe parametru β_j, a $\mathbb{S}(\hat{\beta}_i)$ to błąd szacunku.

- Statystyka testowa testu t-studenta jest odwrotnością względnego błędu szacunku.
- Wartości krytyczne pochodzą z rozkładu t-studenta i można je uzyskać dla określonej **liczby stopni swobody** ($df = n - (k+1)$) oraz **przyjętego poziomu krytycznego** (α).
- Jeżeli $|t_j| > t^{df,\alpha/2}$ - to mamy podstawy do odrzucenia $\mathcal{H}_0$ na rzecz $\mathcal{H}_1$.
- Jeżeli $|t_j| < t^{df,\alpha/2}$ - to nie ma podstaw do odrzucenia $\mathcal{H}_0$ na rzecz $\mathcal{H}_1$.

- *Łączna* istotność oszacowań parametrów może być weryfikowana przy pomocy testu Walda, tj.:

$$\mathcal{H}_0: \quad \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k \quad = 0 \tag{22}$$

$$\mathcal{H}_1: \quad \exists_{j \in \{1,\ldots,k\}} \beta_j \quad \neq 0 \tag{23}$$

- Statystyka testowa:

$$\mathcal{F} = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-(k+1))} \tag{24}$$

- Statystyka testowa $\mathcal{F}$ ma rozkład F-Snedecora z $r_1 = k$ oraz $r_2 = n - (k+1)$ stopniami swobody.
- Jeżeli $\mathcal{F} > \mathcal{F}^{r_1,r_2,\alpha}$ - to mamy podstawy do odrzucenia $\mathcal{H}_0$ na rzecz $\mathcal{H}_1$.
- Jeżeli $\mathcal{F} < \mathcal{F}^{r_1,r_2,\alpha}$ -to nie ma podstaw do odrzucenia $\mathcal{H}_0$ na rzecz $\mathcal{H}_1$.

MNK z ograniczeniami

- **Test Walda** umożliwia przede wszystkim **szersze testowanie restrykcji liniowych**.

$$\mathcal{H}_0 : \mathbf{R} \times \beta = q \tag{25}$$

Macierz restrykcji **R** jest wymiarów $r \times (k+1)$, gdzie r to liczba restrykcji. Restrykcje są zapisywane *wierszowo*, a test Walda pozwala na weryfikację koniunkcji wszystkich restrykcji.

- Statystyka testowa:

$$\mathcal{F} = \frac{(SSE(\hat{\beta}^R) - SSE(\hat{\beta}))/r}{SSE(\hat{\beta})/(n-(k+1))} \tag{26}$$

ma rozkład F-Snedecora z $r_1 = r$ oraz $r_2 = n - (k+1)$.
$SSE(\hat{\beta}^R)$ - jest sumą kwadratów reszt modelu z restrykcjami;
$SSE(\hat{\beta})$ - jest sumą kwadratów reszt modelu bez restrykcji;

- Przykłady wykorzystania testu Walda:
  - Weryfikowanie restrykcji ekonomicznych.
  - Test pominiętych zmiennych.

- **Przykład #1:** test Walda na istotność zmiennych w modelu:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Przykład #2:** załóżmy, że mamy cztery zmienne egzogeniczne oraz
  1. $\beta_1 = \beta_3$
  2. $\beta_2 = \nu$
  3. $\beta_1 + \beta_4 = \gamma$.

  Wtedy:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad q = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu \\ \gamma \end{bmatrix}$$

- Punktem wyjścia jest minimalizacja sumy kwadratów reszt jednak przy pewnych ograniczeniach:

$$\min SSE(\hat{\beta}^R) = \min \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\right)^T \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\right) \tag{27}$$

$$\text{p.w.} \quad R\beta = q. \tag{28}$$

- Funkcja Lagrange'a:

$$\mathcal{L}\left(\beta, \lambda\right) = \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\right)^T \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\right) + 2\lambda^T \left(R\beta - q\right). \tag{29}$$

- Warunki pierwszego rzędu na optymalizację (minimalizację):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = -2\mathbf{X}^T \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta\right) + 2R^T \lambda = 0, \tag{30}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2\left(R\beta - q\right) = 0. \tag{31}$$

- Po uproszczeniu otrzymujemy następujący (macierzowy) układ równań:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}^T\mathbf{X} & R^T \\ R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^T\mathbf{y} \\ q. \end{bmatrix} \tag{32}$$

- Zatem rozwiązanie tego układu równań będzie zawierać estymator RLS (*restricted least squares*):

$$\hat{\beta}^R = \hat{\beta}^{OLS} - \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1} R^T \left[R\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1} R^T\right]^{-1} \left(R\hat{\beta}^{OLS} - q\right), \quad (33)$$

a towarzysząca wariancja wynosi:

$$Var(\hat{\beta}^R) = \sigma^2 \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1} - \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1} R^T \left[R\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1} R^T\right]^{-1} R\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1} \quad (34)$$

- Statystyka $\mathcal{F}$ ma rozkład F-Snedecora z $r_1 = r$ oraz $r_2 = n - (k+1)$ stopniami swobody.

$$\mathcal{F} = \frac{(SSE(\hat{\beta}^R) - SSE(\hat{\beta}))/r}{SSE(\hat{\beta})/(n-(k+1))} \tag{35}$$

ma rozkład F-Snedecora z $r_1 = r$ oraz $r_2 = n - (k+1)$.
$SSE(\hat{\beta}^R)$ - jest sumą kwadratów reszt modelu z restrykcjami;
$SSE(\hat{\beta})$ - jest sumą kwadratów reszt modelu bez restrykcji;

- Ogólniejsza statystyka $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{W} = r\mathcal{F} \tag{36}$$

- ma rozkład χ^2 z r stopniami swobody.

Współliniowość

- **Współliniowość deterministyczna** to sytuacja, w której jedna ze zmiennych objąśniających może zostać przedstawiona jako kombinacja liniowa pozostałych regresorów. Wówczas niemożliwe jest uzyskanie estymatora β^{OLS}.
- **Współliniowość stochastyczna** polega na wysokiej zależności statystycznej pomiędzy zmiennymi objaśniającymi.
- Problem współliniowości (stochastycznej) może powodować zwiększenie **wariancji estymatora MNK (zmniejszenie efektywności).**
- Współliniowość może zostać zidentyfikowana przy pomocy **czynnika inflacji wariancji CIW (ang. *Variance Inflation Factor*)**. Dla każdej ze zmniennych objaśniających konstruowany jest model x_j, w którym zmienną objaśnianą jest ona sama, a zmiennymi objaśniającymi pozostałe zmienne z wyjściowego zbioru regresorów, czyli:

$$\forall_{j \in J-\{j\}} x_j = \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_J x_J + \varepsilon \tag{37}$$

Dla każdego modelu jest obliczany współczynnik determinacji R^2, a następnie CIW_j:

$$CIW_j = \frac{1}{1 - R_j^2} \tag{38}$$

- **Wartości CIW powyżej 10 sugerują problem współliniowości**. Wtedy R^2 z regresji pomocniczej jest większe od 0.9.

W przypadku współliniowości kluczowa jest identyfikacja źródeł tego problemu, tj. czy wynika z jakości danych czy też specyfikacji modelu ekonometrycznego.

- Brak zmian.
- Usunięcie zmiennych współliniowych zmiennych objaśniającyh.
  Usunięcie zmiennych objaśniających z specyfikacji modelu może doprowadzić do obciążenia oszacowań parametrów uzyskanych MNK.
- Transformacja zmiennych objaśniających.
- Wykorzystanie regresji grzbietowej (*ridge regression*):

$$\hat{\beta}^{RIDGE} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \lambda I)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \tag{39}$$

gdzie λ to skalar a I to macierz jednostkowa.
Estymator regresji grzbietowej $\hat{\beta}^{RIDGE}$ jest **obciążony**, ale posiada **mniejszą wariancję (jest bardziej efektywny)** niż $\hat{\beta}^{OLS}$.

Normalność rozkładu składnika losowego

- **Normalność rozkładu składnika losowego** nie jest wymaganą własnością składnika losowego, ale umożliwia korzystanie z testów statystycznych weryfikujących pozostałe własności składnika losowego.
- Badanie normalności składnika losowego:
  - histogram reszt,
  - testy statystyczne, np. test Jarque'a-Berry.

- **Test Jarque'a-Berry** jest najpopularniejszą metodą w weryfikacji normalności składnika losowego. Statystyka tego testu opiera się na kurtozie i skośności reszt:

$$JB = \frac{n}{6}(S^2 + \frac{1}{4}(K-3)^2) \tag{40}$$

gdzie S i K to odpowiednio estymatory skośności oraz kurtozy składnika losowego:

$$S = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e_i - \bar{e})^3}{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e_i - \bar{e})^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{oraz} \quad K = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e_i - \bar{e})^4}{(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e_i - \bar{e})^2\right)^2} - 3 \tag{41}$$

- Hipotezą zerową jest normalność składnika losowego:

$$\mathcal{H}_0 : \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

- Wartość statystyki testowej ma rozkład χ^2 z dwoma stopniami swobody. Jeżeli wartość JB jest większa od wartości krytycznej z rozkładu χ^2 to są podstawy do odrzucenia $\mathcal{H}_0$.
- Odrzucenie hipotezy zerowej uniemożliwia korzystanie z testów statystycznych. Ale w przypadku dużej próby, własności asymptotyczne testów nadal są pożądane.