

Ekonometria Stosowana Zaawansowana
Termin oddania: 15 stycznia, 2026, 20.00

Informacje ogólne: rozwiązania zadań powinno zostać przesłane elektronicznie (drogą mailową z adresu uczelnianego) i powinno zawierać dwa pliki: pdf z rozwiązaniem oraz plik do (lub inny kod) pozwalający zreplikować obliczenia. Proszę o mail z tytułem *[SGH] Zaawansowana Ekonometria Stosowana. Praca domowa 2..*

Zadanie 1. Zagregowana funkcja produkcji. Rozważ następujące funkcje produkcji Cobb-Douglasa:

$$\mathcal{PF}^{CD} : Y_t = \Gamma_t K_t^{\alpha_1} L_t^{\alpha_2}, \quad (1)$$

gdzie Y_t to realna wartość dodana, K_t to zasób kapitału rzeczowego, L_t to liczba pracujących a Γ_t to postęp technologiczny. Mimo nieliniowego charakteru, powyższa funkcji produkcji może zostać przedstawiona w postaci liniowej:

$$\mathcal{PF}^{CD} : y_t = \gamma_t + \alpha_1 k_t + \alpha_2 l_t, \quad (2)$$

gdzie $y_t = \ln(Y_t)$, $\gamma_t = \ln(\Gamma_t)$, $k_t = \ln(K_t)$ oraz $l_t = \ln(L_t)$.

- (i) Wykorzystując zbiór danych `USMacro.dta` oszacuj parametry strukturalne funkcji produkcji Cobb-Douglasa (2). Załóż tymczasowo brak postępu technologicznego, a więc $\gamma_t = \text{const.}$ Zinterpretuj uzyskane oszacowania.
- (ii) Zmodyfikuj założenie związane z postępem technologicznym. Załóż teraz, że $\gamma_t = \gamma_t + \gamma_0$. Zinterpretuj to założenie. Następnie oszacuj parametry (2) i porównaj z poprzednimi oszacowaniami.
- (iii) Dla obu regresji przeanalizuj czy składnik losowy charakteryzuje się autokorelacją. Zinterpretuj ekonomicznie składnik losowy i na podstawie wiedzy ekonomicznej przedyskutuj czy powinien charakteryzować persystencją.
- (iv) W przypadku obu regresji zastosuj metodę uwzględniającą autokorelację składnika losowego. Czy uwzględnienie autokorelacji zmieniło implikacje ilościowe oszacowań.
- (v) Kluczową charakterystyką funkcji produkcji są przychody względem skali, które w przypadku funkcji Cobb-Douglasa będą: (i) stałe, gdy $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, (ii) malejące, jeżeli $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, oraz (iii) rosnące, gdy $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$. Czy na podstawie uzyskanych oszacowań można określić jaki typ korzyści względem skali charakteryzuje funkcję produkcji w Stanach Zjednoczonych? W odpowiedzi uwzględnij wynik odpowiedniego testu statystycznego.
- (vi) Przeprowadź teraz analizę stacjonarności dla kluczowych zmiennych, a więc y_t , k_t oraz l_t . Czy zmienne są stacjonarne? Jaki jest stopień integracji tych zmiennych? Czy wnioski z tego punktu podważają jakość wnioskowania w poprzednich punktach? Jeżeli tak to uzasadnij.
- (vii) Czy zmienne y_t , k_t oraz l_t są trendostacjonarne? Uzasadnij odpowiedź powołując się na podstawie wyników odpowiednich testów.
- (viii) Przetestuj stacjonarność składnika losowego w rozważanych regresjach, tj. z punktu (i) oraz (ii). Czy można się spodziewać, że czynniki produkcji oraz produkt są skointegrowane? Odpowiedź uzasadnij.
- (ix) Jedną z implikacji funkcji produkcji Cobb-Douglasa jest stabilność w czasie udziałów wynagrodzenia czynników produkcji. Zaproponuj strategię weryfikacji tej własności a następnie sprawdź czy udział wynagrodzenia pracy w PKB (*labor share*) jest stabilny w czasie.
- (x) Rozważ bardziej ogólną postać funkcji produkcji, a więc funkcję produkcji o stałej elastyczności substytucji CES (*Constant Elasticity of Substitution*):

$$\mathcal{PF}^{CES} : Y_t = \Gamma_t \left[\pi_0 (\Gamma_t^K K_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1 - \pi_0) (\Gamma_t^L L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad (3)$$

gdzie σ to elastyczność substytucji pomiędzy kapitałem a pracą, a Γ_t^K oraz Γ_t^L to postęp technologiczny ukie-
runkowany na produktywność kapitału i pracy. Warto zauważyć, że gdy $\sigma = 1$ to wtedy funkcja (3) jest postaci
Cobb-Douglasa. W literaturze ekonomicznej, parametry funkcji (3) najczęściej identyfikuje się korzystając z infor-
macji o cenach czynników wytwórczych. Standardowy problem optymalizacji prowadzi do następującej zależności
pomiędzy (logarytmem naturalnym) *labor share* (ls_t) a (logarytmem naturalnym) produktywnością pracy yl_t oraz
postępem technologicznym:

$$ls_t = \beta_0 + \frac{1 - \sigma}{\sigma} [yl_t + \ln(\Gamma_t^L)], \quad (4)$$

gdzie β_0 to stała. Oszacuj parametry równania (4) wykorzystując założenie o tym, że $\Gamma_t^L = \exp(\gamma^L t)$. Przetestuj
autokorelację i jeżeli to konieczne uwzględnij tę charakterystykę w szacowaniu parametrów (4). Jaka jest wartość

empiryczna elastyczności substytucji (Wskazówka: Zauważ, że zależność (4) jest liniowa, a więc σ będzie nieliniową funkcją parametry przy yl_t . Warto wykorzystać funkcję `nlcom`)? Czy założenie o funkcji Cobba-Douglasa jest spełnione? Zinterpretuj oszacowanie γ^L .

- (xi) Elastyczność substytucji może również być szacowana na podstawie informacji o udziale wynagrodzenia kapitału w PKB. Wtedy,

$$cs_t = \eta_0 + \frac{1 - \sigma}{\sigma} [yk_t + \ln(\Gamma_t^K)], \quad (5)$$

gdzie η_0 to stała, cs_t to logarytm naturalny udziału wynagrodzenia kapitału w PKB, yk_t to logarytm naturalny relacji produktu do kapitału. Przyjmij założenie, że suma udziału wynagrodzeń kapitału i pracy w PKB wynosi 1 a następnie spróbuj zmierzyć cs_t korzystając z założenia, że średnia *labor share* w próbie wynosi 0.66. Następnie, załóż, że $\Gamma_t^K = \exp(\gamma^K t)$ i oszacuj parametry równania (5). Jaka jest wartość empiryczna elastyczności substytucji? Czy założenie o funkcji Cobba-Douglasa jest spełnione? Zinterpretuj oszacowanie γ^K . Czy uzyskane wyniki różnią się od tych z poprzedniego podpunktu?

- (xii) Rozważ teraz estymację łączną parametrów funkcji produkcji CES na podstawie równań (4) i (5), a więc na podstawie układu równań. Przedyskutuj problem identyfikowalności parametrów. Oszacuj parametry, a więc σ , γ_k oraz γ_l . Porównaj wyniki z poprzednimi oszacowaniami. Czy wyniki estymacji systemowej potwierdzają zasadność wykorzystania funkcji produkcji Cobba-Douglasa?
- (xiii) Przeanalizuj stacjonarność składnika losowego w regresjach (4) i (5) oraz dla każdego równania osobno w estymacji systemowej. Czy wynik ten rzutuje na wcześniejsze wnioski ekonomiczne? Jeżeli tak to podaj na które i uzasadnij.
- (xiv) Czy kluczowe zmienne makroekonomiczne w równaniach (4) i (5) są skointegrowane? Odpowiedź uzasadnij na podstawie odpowiednich testów.

Zadanie 2. Rozważ model grawitacyjny dla eksportu:

$$\ln EX_{ijt} = \beta_0 + \beta_1 \ln GDP_{it} + \beta_2 \ln GDP_{jt} + \beta_3 \ln dist_{ijt} + \varepsilon_{ijt} \quad (6)$$

gdzie $\ln EX_{ijt}$ to logarytm naturalny eksportu brutto z kraju i do kraju j w momencie t , zmienna $dist_{ijt}$ oznacza dystans pomiędzy gospodarkami, GDP to PKB a ε_{ijt} to składnik losowy.

- (i) Wykorzystując zbiór danych `Gravity.dta` oszacuj kluczowe parametry (6). Zinterpretuj uzyskane oszacowania.
- (ii) Oblicz tzw. clustered standard errors. Pogrupuj wariancję według obserwacji dla: (i) każdego importera, (ii) każdego eksportera, (iii) par składających się z eksporterów i importerów. Porównaj uzyskane wyniki. Który wariant grupowania wariancji składnika losowego jest najbardziej wiarygodny? Odpowiedź uzasadnij.
- (iii) Załóż, że składnik losowy składa się z dwóch komponentów: idiosynkratycznego oraz specyficznego dla każdej jednostki (pary eksporter-importer). Zinterpretuj ekonomicznie ten drugi komponent.
- (iv) Oszacuj parametry modelu random effects (RE) dla (6). Porównaj z poprzednimi wynikami. Zinterpretuj parameter ρ .
- (v) Przeprowadź test LM Bresucha-Pagana na istotność wariancji efektów indywidualnych i zinterpretuj uzyskany wynik.
- (vi) Oszacuj parametry modelu fixed effects (FE) dla (6). Porównaj wyniki do poprzednich oszacowań. Wytlumacz dlaczego nie ma możliwości uzyskania oszacowań FE dla parametru β_3 .
- (vii) Do jakiego stopnia oszacowania systematyczne różnice między gospodarkami w eksporcie można wyjaśnić odległością geograficzną?
- (viii) Przeprowadź tzw. poolability test i zinterpretuj uzyskany wynik
- (ix) Przeprowadź test Hausmana. Zinterpretuj wynik i spróbuj ekonomicznie wytłumaczyć główny wniosek z wnioskowania statystycznego.
- (x) Dodaj efekty czasowe (6), a więc dla każdego roku stwórz zmienną binarną a następnie powtórz poprzednie obliczenia, a więc oszacowania podstawowej regresji MNK, modelu FE oraz RE, ale też i kluczowe testy.
- (xi) Czy jesteś w stanie zidentyfikować efekt trendu? Przetestuj istotność efektów czasowych w każdej z poprzednio rozważanych regresji.
- (xii) Na podstawie oszacowań efektów indywidualnych uzyskanych w modelu FE spróbuj odpowiedzieć do jakiego stopnia zmienność efektów indywidualnych może zostać wyjaśniona dystansem geograficznym (w logarytmie naturalnym)
- (xiii) Stwórz zmienną binarną, która będzie przyjmować wartość 1 jeżeli zarówno eksporter, jak importer przynależą do Unii Europejskiej. Oszacuj parametry modelu RE dla (6) rozszerzonego o tę zmienną oraz efekty czasowe. Zinterpretuj to oszacowanie.
- (xiv) Wykorzystując estymator Hausmana-Taylora oszacuj raz jeszcze model (6) rozszerzony o powyższą zmienną binarną oraz efekty czasowe. Przedyskutuj, która zmienna jest potencjalnie endogeniczna. Porównaj wyniki z poprzednimi oszacowaniami.