GOSPODARKA NARODOWA

11-12
(195-196)
Rok XVIII
listopad-grudzień
2007

Jakub GROWIEC*

Warunki zrównoważonego wzrostu gospodarczego

Wprowadzenie

Celem niniejszego artykułu jest odniesienie do literatury z zakresu teorii wzrostu, a także przedyskutowanie konsekwencji faktu, że zrównoważony wzrost gospodarczy jest w istocie warunkiem „na ostrzu noża" (zob. [Growiec, 2007]). Innymi słowy, istnienie ścieżki zrównoważonego wzrostu, tj. takiego rozwiązania dynamicznego układu gospodarczego, że wszystkie zmienne rosną stałą stopą, wymaga nałożenia na przestrzeń parametrów danego modelu przynajmniej jednego warunku równościowego. Konieczność ta pociąga za sobą daleko idące skutki, które postaramy się omówić.

Tłem poniższych rozważań jest *krytyka liniowości*, sformułowana przez Jonesa [2005]. Krytyka ta zasadza się na stwierdzeniu, że niemal wszystkie modele wzrostu, które zostały kiedykolwiek omówione w literaturze i były w stanie wygenerować wzrost w stanie ustalonym (ścieżkę zrównoważonego wzrostu), zawierały przynajmniej jedno *liniowe* równanie różniczkowe/różnicowe (zob. też część trzecia poniżej). Ścisła liniowość jest zaś warunkiem „na ostrzu noża", równoważnym żądaniu, by w równaniu postaci:

$$\dot{X} = \alpha X^{\phi}, \quad \alpha > 0, \tag{1}$$

parametr ϕ wynosił *dokładnie* jeden. Źródłem krytyki sformułowanej przez Jonesa jest fakt, że długookresowa dynamika zmiennej X byłaby jakościowo różna, gdyby $\phi < 1$ albo $\phi > 1$[1].

---

* Autor jest pracownikiem Zakładu Wspomagania i Analiz Decyzji Instytutu Ekonometrii Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie. Artykuł wpłynął do redakcji we wrześniu 2007 r. Autor pragnie podziękować Fundacji na rzecz Nauki Polskiej za wsparcie finansowe oraz T. Szapiro za pomocne uwagi.

[1] Dla krytyki liniowości nie ma znaczenia, jaką interpretację ekonomiczną ma X. I tak na przykład, Jones [2003] zestawia ze sobą modele, w których X jest kapitałem fizycznym (model *AK*),

Dla przejrzystości wywodu, zdefiniujmy teraz *warunek* „na ostrzu noża”[2] jako taki warunek ograniczający nałożony na wartości parametrów, że zbiór wartości spełniających go ma puste wnętrze w przestrzeni wszystkich możliwych wartości. Wartości parametrów, wobec których wymagamy spełnienia zadanego warunku „na ostrzu noża”, będziemy nazywać *nietypowymi*. Zbiór typowych wartości parametrów jest natomiast gęsty w przestrzeni wszystkich możliwych wartości: żaden z góry zadany warunek „na ostrzu noża” nie jest w typowym przypadku spełniony. Zrozumienie tej definicji ułatwia istotnie fakt, że w poniższych rozważaniach będziemy formułować warunki „na ostrzu noża” wyłącznie w postaci równań[3].

Bezpośrednią podstawą niniejszego artykułu są twierdzenia 1 i 2, zaczerpnięte z pracy Growca [2007]. Twierdzenia te mówią, że wzrost w stanie ustalonym jest zjawiskiem „na ostrzu noża” i wymaga nietypowych wartości parametrów; nawet dołączanie do modelu równań różniczkowych bądź różnicowych dowolnie wysokiego skończonego rzędu nie rozwiązuje podstawowego problemu: dla uzyskania trwałego wykładniczego wzrostu (tj. istnienia ścieżki zrównoważonego wzrostu ze ściśle dodatnimi stopami wzrostu) *konieczne* jest przyjmowanie założeń „na ostrzu noża”.

Wspomniane twierdzenia stanowią wsparcie trzeciej z pięciu „oczywistych” zasad myślenia o wzroście gospodarczym, sformułowanych przez Temple’a [2003]: „Nie odrzucaj modelu wzrostu dlatego, że jego długookresowe wyniki wymagają założeń „na ostrzu noża”. Jeśli zakładamy istnienie ścieżki zrównoważonego wzrostu, dla warunków „na ostrzu noża” nie ma alternatywy. Konsekwencją tego faktu jest konstatacja, że nawet najmniejsze zmiany wartości parametrów są wystarczające, aby odwrócić dynamikę gospodarki i wyeliminować wzrost w stanie ustalonym. Dochodzimy zatem do pesymistycznego wniosku, że długookresowy wzrost jest bardzo „delikatny” i (w intuicyjnym sensie tego słowa) niestabilny.

Niniejszy artykuł powstał w celu rozszerzenia oraz przedyskutowania konsekwencji powyższych wyników. Udowadniamy tu dwie tezy. Po pierwsze, wyniki Growca [2007] można istotnie wzmonić. Czynimy to, udowadniając, że warunki typu „$\phi = 1$ w równaniu (1)” nie tylko są „na ostrzu noża”, ale też generują bifurkacje. Rozdzielają one od siebie przypadki jakościowo różnych dynamik danego modelu: dla $\phi > 1$ dynamika ta jest wybuchowa – stopy wzrostu rosną wraz z czasem[4], zaś dla $\phi < 1$ wzrost gospodarczy stopniowo wygasa – stopy wzrostu spadają do zera.

---

kapitałem ludzkim (model Uzawy-Lucasa), poziomem technologii (model Romera), a także liczbą ludności (liniowe równanie przyrostu naturalnego), a następnie wskazuje, że wszystkie te modele są w jednakowym stopniu dotknięte krytyką liniowości.

2 Alternatywnie, warunek taki można by nazwać „krawędziowym”. Pozostaniemy tu jednak przy nieco niezgrabnej formie „warunek na ostrzu noża”, gdyż to bezpośrednie tłumaczenie angielskiego *knife-edge condition* pojawiało się już w polskojęzycznej literaturze, w tym samym znaczeniu co w niniejszym artykule, np. w kontekście modelu wzrostu Harroda-Domara.

3 Przykładowo, $\aleph = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$, gdzie a jest pewnym wektorem, a b jest liczbą, jest $n-1$-wymiarową podprzestrzenią zanurzoną w $\mathbb{R}^n$, a zatem $int\, \aleph = \emptyset$, czyli $a^T x = b$ jest warunkiem na „ostrzu noża”.

4 W przypadku gdy model sformułowany jest w czasie ciągłym, oznacza to, że pewne zmienne osiągną nieskończone wartości w skończonym czasie.

Po drugie, wyniki te rzucają nowe światło na debatę o źródłach długookresowego wzrostu, obecną w literaturze co najmniej od końca lat osiemdziesiątych [Lucas, 1988], [Romer, 1990]. Równolegle do dyskusji ściśle ekonomicznej, przywołującej fakty empiryczne, toczy się bowiem w literaturze dyskusja o pożądanych i niepożądanych właściwościach formalnych modeli wzrostu, w której pojawiają się również argumenty matematyczne i logiczne (zob. np. [Jones, 1999, 2003]). W niniejszym artykule zestawiamy tę dyskusję z faktem, że zrównoważony wzrost jest warunkiem „na ostrzu noża". Zestawienie to ujawnia bezpośredni związek między przyjmowanymi w modelach warunkami „na ostrzu noża" a implikowanymi przez nie ostatecznymi źródłami wzrostu w długim okresie.

Część pierwsza przywołuje wspomniane powyżej twierdzenia Growca [2007]. W części trzeciej wskazano warunki „na ostrzu noża", dzięki którym znane z literatury modele generują zrównoważony wzrost w długim okresie. Podkreślono przy tym, że czasami warunki te nie są widoczne na pierwszy rzut oka, co obniża przejrzystość debaty o źródłach wzrostu. W następnej części opisano szczególną implikację założenia o istnieniu ścieżki zrównoważonego wzrostu – „krytykę osobliwości". W części piątej zidentyfikowano i przeanalizowano zapowiedzianą powyżej bifurkację. Ostatnia część zawiera uwagi końcowe.

Wzrost w stanie ustalonym jest warunkiem „na ostrzu noża": dwa twierdzenia

W artykule Growca [2007] udowodniono dwa ogólne twierdzenia, będące znaczącym uogólnieniem wyników uzyskanych wcześniej przez Christiaansa [2004] i Laffargue'a [2004]. Twierdzenia te mówią o niemożliwości skonstruowania modelu wzrostu, który generuje ścieżkę zrównoważonego wzrostu, mimo braku warunków „na ostrzu noża". Pod lupę wzięto zarówno modele z czasem ciągłym, jak i dyskretnym. Uwzględniono także równania różniczkowe i różnicowe dowolnego skończonego rzędu.

Przywołajmy te twierdzenia:

Twierdzenie 1. *Nie da się skonstruować modelu z czasem ciągłym, którego dynamika opisana jest autonomicznymi równaniami różniczkowymi (dowolnego rzędu), w którym występuje ścieżka zrównoważonego wzrostu taka, że*

(a) pewne zmienne stanu rosną na niej wykładniczo ze stałą dodatnią stopą wzrostu,

(b) nie wymaga ona założeń na ostrzu noża (założeń osobliwości pewnej macierzy).

Dowód. Zob. Growiec [2007].

Twierdzenie 2. *Nie da się skonstruować modelu z czasem dyskretnym, którego dynamika opisana jest autonomicznymi równaniami różnicowymi (dowolnego rzędu), w którym występuje ścieżka zrównoważonego wzrostu taka, że*

(a) pewne zmienne stanu rosną na niej geometrycznie ze stałą dodatnią stopą wzrostu,

(b) nie wymaga ona założeń na ostrzu noża (założeń homogeniczności stopnia 1 pewnego odwzorowania).

Dowód. Zob. Growiec [2007].

Zestawimy teraz te twierdzenia z modelami wzrostu znanymi z literatury.

Warunki „na ostrzu noża" w literaturze

Teoretycy wzrostu ograniczają się na ogół do przypadku modeli z funkcjami akumulacji zmiennych stanu typu Cobba-Douglasa ze skończoną liczbą parametrów. Jak się wkrótce okaże, istotnie ułatwia to wskazanie przyjmowanych przez nich warunków „na ostrzu noża", niezbędnych dla istnienia ścieżek zrównoważonego wzrostu[5].

Ponieważ przywołane twierdzenia mają charakter ściśle teoretyczny, poniższe omówienie abstrahuje od empirycznej strony debaty o źródłach wzrostu. Źródła zrównoważonego wzrostu w omawianych modelach będziemy identyfikować w następujący sposób. Najpierw zróżniczkujemy względem czasu logarytmicznie stronami te równania różniczkowe danego modelu, które określają jego dynamikę. Następnie przyrównamy drugie pochodne logarytmiczne do zera w każdej chwili czasu $t \geq 0$. Stosowane powszechnie funkcje Cobba-Douglasa ułatwią zrozumienie nietypowości modeli, w których występuje ścieżka zrównoważonego wzrostu.

Pochodne logarytmiczne względem czasu oznaczamy $\hat{X} = \dot{X}/X$. Jeśli $X > 0$, mamy także $\hat{X} = \frac{d(\ln X)}{dt}$. Drugie pochodne logarytmiczne oznaczamy $\hat{\hat{X}} = \dot{\hat{X}}/\hat{X}$. Zakładamy, że wszystkie zmienne udziału, z definicji zawarte między zerem a jedynką (np. udział pracowników sektora badawczo-rozwojowego w łącznej populacji), są stałe na ścieżce zrównoważonego wzrostu.

Endogeniczny wzrost

Rozpoczynamy od teorii endogenicznego wzrostu opartego o działalność badawczo-rozwojową (B + R). Skupimy się na modelach wzrostu w pełni endogenicznego, pozbawionych efektów skali[6]. Nurt ten zapoczątkował Young [1998], równolegle z Aghionem i Howittem [1998] oraz innymi badaczami.

---

5 Można podać co najmniej trzy powody, dla których upowszechniła się tradycja wykorzystywania funkcji Cobba-Douglasa w teorii wzrostu: po pierwsze, są one w przybliżeniu zgodne z danymi mikroekonomicznymi dotyczącymi procesów produkcyjnych (pojawiają się jednak kontrowersje, jak dokładne jest to przybliżenie, zob. [Duffy i Papageorgiou, 2000]); po drugie, łatwo poddają się przekształceniom algebraicznym; po trzecie, są szczególnie użyteczne ze względu na twierdzenie o wzroście w stanie ustalonym Uzawy [1961]: jeśli dany neoklasyczny model wzrostu posiada ścieżkę zrównoważonego wzrostu ze stałymi udziałami czynników, to albo funkcja produkcji jest Cobba-Douglasa, albo postęp technologiczny podnosi jedynie efektywność pracy (pozostawiając efektywność kapitału rzeczowego na niezmienionym poziomie).

6 Krytykę prekursorskiego modelu Romera [1990], opartą o niezgodność z empirią implikowanych przez niego efektów skali, sformułował Jones [1995]. Model Romera [1990] zakłada kontrfaktycznie, że stopa wzrostu gospodarki w stanie ustalonym jest wprost proporcjonalna do liczebności populacji.

Mechanizmem generującym długookresowy wzrost jest tu równanie B + R (akumulacji wiedzy), które przedstawiamy w wersji pochodzącej od Ha i Howitta [2005]:

$$\hat{A} = \alpha \left(\frac{L_A}{L^\beta} \right)^\lambda A^{\phi - 1}, \quad \lambda \in [0,1]. \tag{2}$$

W powyższym równaniu, A jest aktualnym poziomem wiedzy L_A, jest liczbą naukowców, zaś L jest wielkością populacji (a zarazem wielkością siły roboczej). Liczebność populacji jest tu uwzględniona w celu wytworzenia dodatkowego efektu zewnętrznego, tzw. efektu rozpowszechniania się produktów (*product proliferation effect*). Stwierdzamy, że na ścieżce zrównoważonego wzrostu zachodzi $\hat{L}_A = \hat{L}$ oraz

$$0 = \hat{\hat{A}} = \lambda \hat{L}_A - \lambda\beta\hat{L} + (\phi - 1)\hat{A} \Rightarrow (1 - \phi)\hat{A} = \lambda(1 - \beta)\hat{L}. \tag{3}$$

Ostatnia równość jest spełniona z $\hat{A} > 0$ – co oznacza występowanie wykładniczego wzrostu PKB *per capita* – jeśli $\phi = 1$, co jest warunkiem „na ostrzu noża" (warunek ten jest fundamentalny dla teorii w pełni endogenicznego wzrostu generowanego przez działalność B + R); oraz jeśli przynajmniej jeden z kolejnych warunków równościowych jest spełniony: $\lambda = 0$, $\beta = 1$ lub $\hat{L} = 0$.

Warunek $\lambda = 0$ oznacza, że produktywność B + R jest niezależna od nakładów na B + R, co jest sprzeczne z obserwacją; $\beta = 1$ oznacza natomiast, że efekt zewnętrzny rozpowszechniania się produktów *dokładnie* znosi się z efektem nakładów na B + R, dzięki czemu w stanie ustalonym wzrost populacji nie przekłada się na przyrost wiedzy A (tj. druga pochodna A po czasie wynosi zero); warunek $\hat{L} = 0$ oznacza stałą liczebność populacji. W literaturze zwykło się przyjmować, że $\beta = 1$ (zob. [Aghion i Howitt, 1998], rozdział 12) bądź $\beta = \hat{L} = 0$ [Romer, 1990].

Jeśli $\phi \neq 1$, a zatem równanie różniczkowe (3) nie jest ściśle liniowe względem A, wtedy nie będzie wzrostu w stanie ustalonym, chyba że (przynajmniej asymptotycznie) $\hat{L} = n > 0$. Ale w takim przypadku, liniowość rozpatrywanego równania różniczkowego zostaje po prostu przesunięta do innego równania modelu, to wzrost populacji staje się kluczowym czynnikiem generującym wzrost, a sam model staje się wersją modelu semi-endogenicznego wzrostu Jonesa [1995], opisanego poniżej.

Semi-endogeniczny wzrost

Mechanizm generujący długookresowy wzrost w modelach semi-endogenicznego wzrostu opartego o B + R jest opisany układem równań:

$$\begin{cases} \hat{A} = \alpha L_A^\lambda A^{\phi - 1}, \\ \hat{L} = n A^\theta L^\sigma, \end{cases} \tag{4}$$

przy czym $\lambda \in [0,1]$.

Autorzy prac w tym nurcie, np. Jones [1995], Kortum [1997], czy Segerstrom [2000], zakładają liniowość drugiego równania względem L, tj. $\theta = \sigma = 0$. Jest to założenie „na ostrzu noża", ale można się tu posłużyć bardzo intuicyjnym uzasadnieniem, że „to biologiczny fakt natury, że ludzie rozmnażają się proporcjonalnie do swej liczby" [Jones, 2003]. Tym niemniej, rozważmy tu przypadek ogólniejszy, uwzględniający w prosty sposób zarówno potencjalny wpływ poziomu wiedzy w gospodarce na dzietność i śmiertelność, jak i pewien dodatkowy efekt zatłoczenia (*congestion*), którego nie będziemy dokładniej definiować[7]. Na ścieżce zrównoważonego wzrostu, $\hat{L}_A = \hat{L}$ oraz

$$\begin{cases} 0 = \hat{\hat{A}} = (\phi - 1)\hat{A} + \lambda\hat{L}, \\ 0 = \hat{\hat{L}} = \theta\hat{A} + \sigma\hat{L}. \end{cases} \tag{5}$$

Rozwiązując ten układ, otrzymujemy albo $\hat{L} = \hat{A} = 0$, co eliminuje długookresowy wzrost, albo liniową zależność wektorów $((\phi - 1), \lambda)$ i (θ, σ), tj. warunek równościowy

$$\theta\lambda = \sigma(\phi - 1), \tag{6}$$

który, jak łatwo zauważyć, jest warunkiem „na ostrzu noża" (w szczególności, jest on spełniony, gdy $\theta = \sigma = 0$). Oznacza to, że teoria semi-endogenicznego wzrostu jest również dotknięta skutkami twierdzenia 1, mimo że obywa się bez warunku „na ostrzu noża" $\phi = 1$, charakterystycznego dla modeli w pełni endogenicznego wzrostu przez B + R, oraz bez równań ściśle liniowych (jeśli tylko θ oraz σ są różne od zera). Krytyka liniowości zostaje w ten sposób ominięta – model generuje długookresowy wzrost, mimo że żadne równanie nie jest ściśle liniowe – ale warunku „na ostrzu noża" w postaci (6) ominąć już nie sposób.

Trzeba bowiem pamiętać, że jeśli uwzględniamy w modelu wiele zmiennych stanu, warunek „na ostrzu noża" kluczowy dla uzyskania wykładniczego wzrostu może być „ukryty", a jego znalezienie może wymagać skrupulatnego sprawdzenia konsekwencji przyjętych międzyrównaniowych ograniczeń wartości parametrów. Kwestia ukrytych założeń „na ostrzu noża" była już dyskutowana w kilku kontekstach. Trzema spośród istotnych głosów w tej kwestii są artykuły Li [2000], który identyfikuje założenia „na ostrzu noża" w modelach z dwoma sektorami B + R; Barro i Sala-i-Martina [1995], którzy analizują szczegółowo dwusektorowy model wzrostu Uzawy-Lucasa; wreszcie Eichera i Turnovsky'ego [1999], którzy omawiają modele, gdzie równocześnie i współzależnie akumulowane są kapitał fizyczny oraz wiedza.

7 W modelach semi-endogenicznego wzrostu z endogeniczną dzietnością, ten konieczny warunek „na ostrzu" noża przekształca się na ogół w wymaganie, by funkcja użyteczności z konsumpcji była logarytmiczna – tj. żeby międzyokresowa elastyczność substytucji konsumpcji wynosiła dokładnie jeden, por. Connolly, Peretto [2003] i Jones [2003]. To nie jest tak łatwo interpretowalne założenie, jak $\dot{L} = nL$...

Modele z kapitałem ludzkim oraz działalnością B + R

Obok działalności B + R, za kluczowy czynnik długookresowego wzrostu uważa się akumulację kapitału ludzkiego (poprzez edukację bądź nabywanie umiejętności przez praktykę – *learning by doing*, por. np. [Lucas, 1988], [Strulik, 2005]). Wprowadźmy zatem kapitał ludzki H do omawianych modeli. Na początek posłużmy się powszechnie wykorzystywanym wykładnikiem Mincera (*Mincerian exponential*, por. [Mincer, 1974]). Mechanizm ten, opisany równaniem $H = Le^{\psi \ell_H}$, przekształca inwestycje w kapitał ludzki w przyrosty zasobu kapitału ludzkiego w sposób statyczny, na ścieżce zrównoważonego wzrostu dostajemy więc (por. [Jones, 2005]):

$$\hat{H} = \hat{L} + \psi \dot{\ell}_H = \hat{L}, \tag{7}$$

bowiem $\ell_H \in [0, 1]$ – udział czasu poświęconego edukacji – jest stały na ścieżce zrównoważonego wzrostu. Skoro zatem $\hat{L} = \hat{H}$, dostajemy trywialny wniosek: wprowadzenie sektora akumulacji kapitału ludzkiego jest (w sensie długookresowych stóp wzrostu) równoważne przepisaniu po prostu L jako H w równaniu (4): ścieżka zrównoważonego wzrostu obu modeli wygląda identycznie.

Rozpatrzmy więc nieco ogólniejszy model, w którym długookresowy wzrost jest determinowany przez równania *dynamiczne*:

$$\begin{cases} \hat{A} = \alpha h^{\lambda} L_A^{\lambda} A^{\phi - 1}, \\ \hat{h} = f(\ell_H) h^{\varphi - 1} A^{\mu}, \end{cases} \tag{8}$$

gdzie $\ell_x L = L_x$ dla $x = H, A, Y$ oraz $L_H + L_A + L_Y = L$. Kapitał ludzki *per capita* oznaczyliśmy tu jako h. Skoro $H = hL$, to $\hat{H} = \hat{h} + \hat{L}$. W drugim z powyższych równań, f jest pewną rosnącą i różniczkowalną funkcją opisującą stopę zwrotu z inwestycji w kapitał ludzki, $\varphi \in [0, 1]$ jest siłą efektów zewnętrznych wiedzy (*knowledge spillovers*), zaś $\mu \geq 0$ odzwierciedla spostrzeżenie, że postęp technologiczny może poprawiać efektywność uczenia się, przekazywania innowacyjnych pomysłów i dzielenia się informacjami. Zwróćmy uwagę, że dotąd nie wyspecyfikowaliśmy procesów demograficznych kształtujących dynamikę L.

Jeśli zróżniczkujemy logarytmicznie względem czasu powyższy układ równań i przyrównamy drugie pochodne do zera, to dostaniemy:

$$\begin{cases} 0 = \hat{\hat{A}} = (\phi - 1)\hat{A} + \lambda \hat{h} + \lambda \hat{L} \\ 0 = \hat{\hat{h}} = \mu \hat{A} + (\varphi - 1)\hat{h}. \end{cases} \tag{9}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} \hat{A} = \dfrac{(1 - \varphi)\lambda \hat{L}}{(1 - \phi)(1 - \varphi) - \lambda \mu} \\ \hat{h} = \dfrac{\lambda \mu \hat{L}}{(1 - \phi)(1 - \varphi) - \lambda \mu}, \end{cases} \tag{10}$$

jeśli tylko mianownik $(1-\phi)(1-\varphi)-\lambda\mu \neq 0$, czyli jeśli macierz współczynników w (9) jest nieosobliwa.

Jeśli $(1-\phi)(1-\varphi)-\lambda\mu \neq 0$, powyższy model jest więc modelem semi-endogenicznego wzrostu, w którym wzrost gospodarczy w długim okresie wymaga wzrostu populacji. Można powiedzieć, że jest on konceptualnie równoważny modelowi Jonesa [1995], mimo że jest on istotnie bardziej skomplikowany oraz uwzględnia akumulację kapitału ludzkiego. Ponownie widzimy jednak, że długookresowy wzrost lub jego brak jest konsekwencją odpowiedniego wyspecyfikowania procesów demograficznych, tj. dodania odpowiedniego równania opisującego $\hat{L}$. Jeśli będzie to ściśle liniowe równanie $\hat{L}=nL$, staniemy w obliczu krytyki liniowości (tw. 1), a do tego ostatecznym źródłem wzrostu w długim okresie okaże się przyrost naturalny, a nie działalność B + R czy nawet akumulacja kapitału ludzkiego. Jeśli będzie to równanie nieliniowe, model w ogóle nie wygeneruje wykładniczego wzrostu.

Z drugiej strony, narzucenie warunku „na ostrzu noża" o osobliwości macierzy współczynników, tj. $(1-\phi)(1-\varphi)-\lambda\mu=0$, sprawia że wektory $((\phi-1),\lambda)$; $(\mu,(\varphi-1))$ są liniowo zależne, a długookresowy wzrost jest możliwy nawet, gdy $\hat{L}=0$. W tym szczególnym przypadku, równoczesne włączenie do modelu sektora edukacyjnego (akumulującego kapitał ludzki) oraz sektora B + R, wzajemnie na siebie oddziałujących (*mutual spillovers*), pozwala zastąpić oryginalne założenie Romera [1990], że $\phi=1$ w (8) równoważnym mu założeniem, że $\phi=1-\dfrac{\lambda\mu}{1-\varphi}$ (jeśli $\varphi\neq 1$). Kiedy parametry dobierzemy tak, by nasze założenie osobliwości, będące warunkiem na „ostrzu noża", było spełnione, sprzężenie zwrotne działalności B + R i akumulacji kapitału ludzkiego sprawi, że oba te sektory wzięte łącznie będą ostatecznym źródłem wzrostu w długim okresie.

Poza tym łatwo sprawdzić, że przyjęcie $\varphi=1$, $\mu=0$ redukuje omawiany model do standardowego modelu Uzawy [1965] – Lucasa [1988], gdzie endogeniczny wzrost generowany jest wyłącznie dzięki akumulacji kapitału ludzkiego (edukacji), opisanej liniowym równaniem różniczkowym.

Szczególny charakter wykładniczego wzrostu

W powyższej dyskusji zastosowaliśmy twierdzenia 1-2 do ważnych w literaturze modeli wzrostu. Ważnym jej wnioskiem jest fakt, że rodzaj przyjmowanych przez autorów warunków „na ostrzu noża" odpowiada bezpośrednio ostatecznym źródłom wzrostu gospodarczego w długim okresie uzyskiwanym w ich modelach. W modelach w pełni endogenicznego wzrostu założenia „na ostrzu noża" pojawiają się w równaniu opisującym działalność B + R, więc to właśnie działalność B + R jest źródłem wzrostu w długim okresie. W modelach semi-endogenicznego wzrostu rozumowanie to dotyczy liniowego równania przyrostu ludności. W modelach z B + R oraz edukacją mamy albo powtórkę z semi-endogenicznego wzrostu, albo międzyrównaniowe założenie „na ostrzu noża" $(1-\phi)(1-\varphi)-\lambda\mu=0$, dzięki któremu źródłem wzrostu w długim okresie są działalność B + R oraz edukacja wzięte łącznie.

Ponieważ twierdzenia 1-2 zostały sformułowane w bardzo ogólny sposób, podobne rozumowania można powtarzać także dla pozostałych klas modeli wzrostu, pominiętych powyżej. I tak na przykład, modele egzogenicznego wzrostu bazują na liniowym równaniu postępu technologicznego $\dot{A} = gA$, toteż ostatecznym źródłem wzrostu jest w nich dany egzogenicznie postęp technologiczny (por. [Barro i Sala-i-Martin, 1995]). W modelach endogenicznego wzrostu typu AK, kluczowe dla długookresowego wzrostu jest liniowe równanie akumulacji kapitału $\dot{K} = (A - \delta)K$ (gdzie $\delta \geq 0$ jest stopą deprecjacji). Do dyskusji można też włączyć przykłady omówione przez Eichera i Turnovsky'ego [1999], Li [2000] oraz Christiaansa [2004].

Wskazawszy związek między przyjmowanymi warunkami „na ostrzu noża" a wykładniczym wzrostem, sformułujemy teraz „krytykę osobliwości" (por. [Growiec, 2007]), będącą prostym uogólnieniem krytyki liniowości, sformułowanej przez Jonesa [2005]. Uogólnienie to nie jest tak ogólne, jak twierdzenia 1-2, lecz o tyle przydatne, że można go zastosować bezpośrednio do wszystkich modeli podanych powyżej.

Krytyka osobliwości

Rozpatrzmy względnie ogólny model wzrostu w czasie ciągłym, którego dynamika generowana jest przez układ autonomicznych równań różniczkowych pierwszego rzędu, postaci

$$\hat{X} = F(X), \quad X(0) \text{ dane.} \tag{11}$$

Przez $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będziemy oznaczać wektor n zmiennych stanu (takich jak kapitał fizyczny, kapitał ludzki, poziom technologii, liczba ludności, itd.). Zakładamy też, że każda i-ta zmienna jest przynajmniej dwukrotnie różniczkowalna względem czasu. Przez $\dot{X}$ będziemy oznaczać wektor pierwszych pochodnych X_i po czasie, a przez $\hat{X}$ wektor ich pierwszych pochodnych logarytmicznych. Zakładamy, że wszystkie X_i są dodatnie na ścieżce zrównoważonego wzrostu. Przyjmujemy także, że odwzorowanie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalne w sposób ciągły.

Załóżmy więc, że $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$ i zróżniczkujmy obustronnie równanie (11) po czasie. Dostajemy:

$$\dot{\hat{X}} = DF(X) \cdot \dot{X}. \tag{12}$$

Prawa strona równania (12) jest liniowa ze względu na $\dot{X}$. Przyjmiemy teraz następującą (standardową) definicję ścieżki zrównoważonego wzrostu: jest to stan, w którym wszystkie $\hat{X}_i$ są stałe. Łatwo pokazać, że jest to równoważne przy równaniu wszystkich $\dot{\hat{X}}_i$ do zera. Dostajemy następujący wynik:

$$DF(X) \cdot \dot{X} = 0 \Leftrightarrow \big(\dot{X} = 0 \vee DF(X) \text{ jest osobliwa}\big). \tag{13}$$

Widzimy zatem, że krytyka liniowości, sformułowana przez Jonesa [2005], uogólnia się jako *krytyka osobliwości*. To właśnie osobliwość macierzy $DF(X)$ jest niezbędna do otrzymania ścieżki zrównoważonego wzrostu. Faktycznie, dla modeli zawierających autonomiczne równania różniczkowe pierwszego rzędu, wykładniczy wzrost wymaga spełnienia następującego warunku „na ostrzu noża: na ścieżce zrównoważonego wzrostu, wyznacznik macierzy $DF(X)$ (tj. jakobian odwzorowania F) *dokładnie* znika[8].

Zwróćmy uwagę, że w przeciwieństwie do rozważań poprzedniej części, tym razem nie zawężamy naszych rozważań do funkcji Cobba-Douglasa ze skończoną liczbą p parametrów. Implikowało to, że przestrzeń wartości parametrów była podzbiorem $\mathbb{R}^p$. Tym razem przestrzenią wartości parametrów jest jednak cała przestrzeń Banacha $C^1(\mathbb{R}^n)$, będąca nieskończenie wymiarową przestrzenią funkcyjną. Zbiór $\mathcal{F} \subset C^1(\mathbb{R}^n)$ funkcji, które mają zerowy jakobian wszędzie wzdłuż ścieżki czasowej X, ma puste wnętrze. Weźmy bowiem $F \in \mathcal{F}$. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $F_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R}^n)$ takie, że $\|F_\varepsilon - F\|_{C^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$ oraz $\det(DF_\varepsilon(X)) \neq 0$ dla pewnych X wzdłuż ścieżki czasowej. Zatem $F_\varepsilon \notin \mathcal{F}$, czyli $\mathcal{F}$ ma puste wnętrze. Dowodzi to faktu, że osobliwość $DF(X)$ istotnie jest warunkiem „na ostrzu noża".

Przekształćmy teraz (13), aby otrzymać bezpośredni wzór na $\hat{X}$. Przemnożymy wyrażenia w każdej i-tej kolumnie ($i = 1, 2, \ldots, n$) macierzy $DF(X)$ przez $X_i > 0$. Uzyskaną w ten sposób macierz oznaczymy przez $\Psi(X)$. Mamy:

$$\det \Psi(X) = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \det DF(X), \tag{14}$$

co pozwala wywnioskować, że $\det \Psi(X) = 0 \Leftrightarrow \det DF(X) = 0$, tj. osobliwość bądź nieosobliwość $DF(X)$ jest dziedziczona przez $\Psi(X)$. Mamy też

$$DF(X) \cdot \dot{X} = 0 \Leftrightarrow \Psi(X) \cdot \hat{X} = 0. \tag{15}$$

Macierz $\Psi(X)$ pozwala sformułować w zwięzłej formie następujące stwierdzenia.

Stwierdzenie 1. *Jeśli macierz $\Psi(X)$ jest osobliwa, istnieje continuum wektorów $\hat{X}$ – stóp zrównoważonego wzrostu – spełniających (13), zawartych w przestrzeni własnej wyznaczonej przez zerową wartość własną $\Psi(X)$*[9].

Stwierdzenie 2. *Jeśli parametry modelu spełniają więcej niż jeden warunek na ostrzu noża, tak że zerowa wartość własna $\Psi(X)$ jest wielokrotna, wtedy rozpatrywana przestrzeń własna jest wymiaru większego niż jeden*[10].

Podkreślmy raz jeszcze, że zestaw wartości parametrów, spełniających warunek osobliwości ma puste wnętrze w przestrzeni wszystkich możliwych warto-

---

[8] Nieco mniej ogólny wynik można znaleźć w pracy Christiaansa [2004], twierdzenie 1.

[9] Jako przykład możemy wziąć rodzinę modeli Jonesa, indeksowaną stopą wzrostu populacji $n \geq 0$.

[10] Jako przykład możemy wziąć rodzinę neoklasycznych modeli wzrostu, indeksowaną stopą wzrostu populacji n i egzogeniczną stopą wzrostu poziomu technologii g.

ści. W konsekwencji można stwierdzić, że jeśli podczas ustalania ich wartości występuje losowość, przy czym choć jedna zmienna losowa ma rozkład ciągły, warunek osobliwości będzie spełniony z zerowym prawdopodobieństwem.

Co więcej, jeśli funkcja F nie jest Cobba-Douglasa, tj. nie ma stałych elastyczności cząstkowych, wtedy $\Psi(X)$ zależy istotnie od X. W takim przypadku warunek osobliwości (13) musi być spełniony *dla wszystkich* wartości X na ścieżce zrównoważonego wzrostu, mimo że składowe X rosną wraz z czasem. Założenie to jest więc bardzo trudne do spełnienia: dyskwalifikuje ono liczne postaci funkcji F.

Wniosek powyższy jest wariantem twierdzenia Uzawy [1961] o wzroście w stanie ustalonym (*Steady-state Growth Theorem*): jeśli funkcja produkcji nie jest Cobba-Douglasa, wtedy jak zmienne stanu X_i rosną stałą stopą, pochodne cząstkowe w kolumnach DF powinny zmieniać się w taki sposób, by wyznacznik $DF(X)$ był stale równy zeru.

Bifurkacja

Aby dokładniej zilustrować konsekwencje krytyki osobliwości, będącej szczególnym przypadkiem twierdzeń 1-2, oraz szczególny charakter wykładniczego wzrostu, rozważmy teraz model wzrostu z dwiema zmiennymi stanu, oznaczonymi przez x i y, i funkcją F dwuwymiarową Cobba-Douglasa (zgodnie z tradycją powszechną w literaturze teorii wzrostu, por. część trzecia). Stwierdzimy dla tego szczególnego przypadku, że każdy nietypowy zestaw parametrów, gwarantujący wykładniczy wzrost, jest w istocie zestawem bifurkacyjnym: rozdziela on przypadki wybuchowego wzrostu oraz zerowego wzrostu w długim okresie[11].

Ujmując kwestię formalnie, zapisujemy, że dla pewnych $a, b > 0$,

$$\begin{cases} \hat{x} = a x^{\alpha} y^{\beta} \\ \hat{y} = b x^{\gamma} y^{\delta}, \end{cases} \quad x(0), y(0) \text{ dane,} \tag{16}$$

i w konsekwencji

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{x}(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y}) \\ \dot{\hat{y}} = \hat{y}(\gamma\hat{x} + \delta\hat{y}) \end{cases} \Rightarrow \Psi(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Uzyskana macierz $\Psi(x, y)$ nie zależy od x ani y, co jest cechą charakterystyczną (omalże definicyjną) funkcji Cobba-Douglasa. Ponadto gdy choć jedno z dwu równań (16) jest liniowe (por. krytyka liniowości), to jeden z wierszy $\Psi(x,y)$ jest zerowy, a macierz jest automatycznie osobliwa.

Pokażemy, że zestaw parametrów $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, który implikuje osobliwość $\Psi(x, y)$, a przez to pozwala na trwały wykładniczy wzrost, $\alpha\delta = \beta\gamma$, jest zestawem bifurkacyjnym (zob. [Guckenheimer i Holmes, 1983]). Rozpoznanie tej

11 Intuicyjnie rzecz biorąc, należy spodziewać się, że tego typu bifurkacje będą się pojawiać niezależnie od postaci funkcyjnej F. Ze względu na trudność odpowiedniego dowodu, nie podejmujemy tu jednak próby udowodnienia tej hipotezy.

bifurkacji w przestrzeni stóp wzrostu zmiennych x i y, tj. $(\hat{x}, \hat{y})$, dodaje kolejną cegiełkę do argumentu, że wykładniczy wzrost jest skrajnie wrażliwy na zmiany parametrów.

Na początek oznaczmy $D = \det \Psi(x, y) = \alpha\delta - \beta\gamma$. Możemy przyjąć $\alpha \leq 0$ i $\delta \leq 0$ – założenia te wynikają z ekonomicznej interpretacji macierzy $\Psi(x, y)$: odrzucamy możliwość rosnących korzyści skali w akumulacji czynników w skali makro. Przyjmujemy również $\beta \geq 0$ i $\gamma \geq 0$, tak aby możliwy był pewien korzystny efekt zewnętrzny x (y, odpowiednio) w akumulacji y (x).

Wróćmy teraz do układu równań różniczkowych (17). Weźmy najpierw $D \neq 0$, czyli $\alpha\delta \neq \beta\gamma$. Łatwo sprawdzić, że w tym przypadku $\dot{\hat{x}} = \dot{\hat{y}} = 0$ wtedy, i tylko wtedy, gdy $\hat{x} = \hat{y} = 0$. Ponadto obie osie $\hat{x} = 0$ i $\hat{y} = 0$ są niezmiennicze względem pole wektorowego (17), a wzdłuż nich zachodzi zbieżność do zera. Ponadto prosta o równaniu

$$\hat{y} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta}\hat{x} \tag{18}$$

jest także niezmiennicza (metody uzyskiwania tego typu wyników można znaleźć m.in. w podręczniku [Arnolda, 1975]). Wstawiając (18) do (17) dostajemy, że wzdłuż prostej niezmienniczej (18),

$$\dot{\hat{x}} = \hat{x}^2\left(\frac{-\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta - \delta}\right) = \hat{x}^2\left(\frac{-D}{\beta - \delta}\right), \tag{19}$$

a zatem wzdłuż tej prostej występuje zbieżność do zera wtedy, i tylko wtedy, gdy $D > 0$[12]. W tym przypadku zerowy stan ustalony jest asymptotycznie stabilny. Jeśli natomiast $D < 0$, wzdłuż prostej niezmienniczej (18) występuje rozbieżność, a zerowy stan ustalony jest punktem siodłowym.

Przyjmijmy teraz założenie „na ostrzu noża" $D = 0$ ($\alpha\delta = \beta\gamma$). Widzimy, że pojawia się całe continuum stanów ustalonych, będących podprzestrzenią liniową rozpiętą przez wektor własny $(-\alpha, \beta)$ (lub jeśli $\alpha = \beta = 0$, przez wektor własny $(\gamma, -\delta)$)[13].

Tak duża liczba stanów ustalonych jest tu *wyłącznie wynikiem wyboru nietypowego zestawu parametrów*, a każde ε-zaburzenie wartości parametrów eliminuje wszystkie stany ustalone poza zerowym.

W omawianej sytuacji mamy do czynienia z bifurkacją, ponieważ w czasie gdy wyznacznik zmienia znak, zerowa wartość własna traci stabilność. Gdy $D > 0$, model gwarantuje zbieżność stóp wzrostu do zera (wzrost stopniowo wygasa); gdy $D < 0$, model charakteryzuje się eksplozywną dynamiką – stopy

---

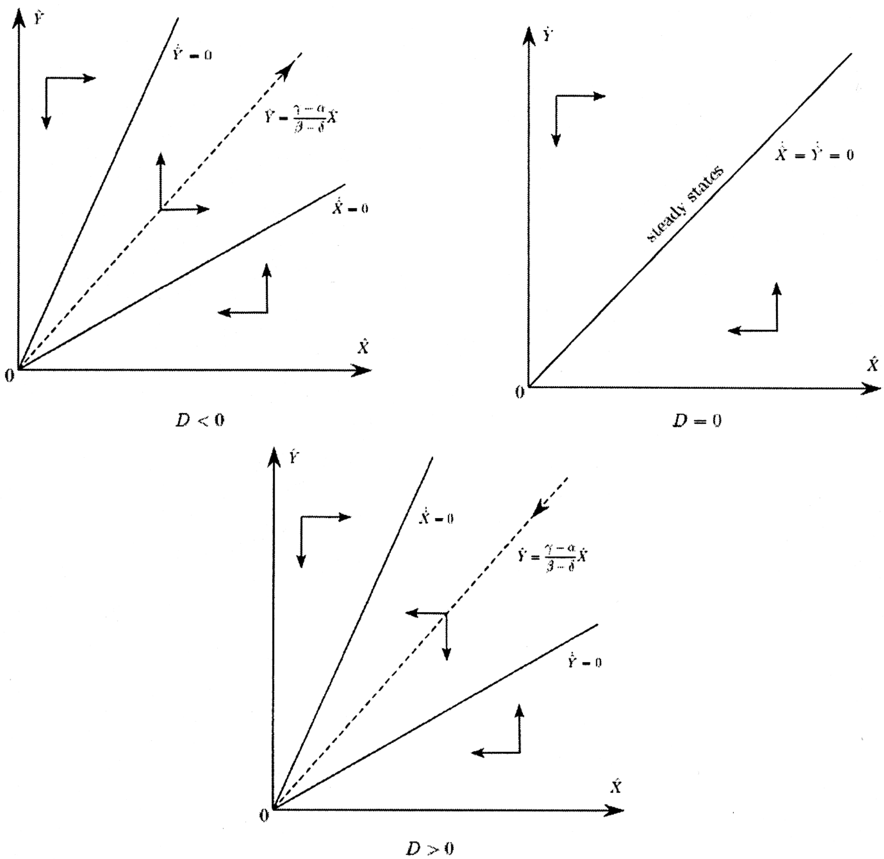
[12] Z założeń $\beta \geq 0$ i $\delta \leq 0$, przy czym przynajmniej jedno z nich nie jest zerem, dostajemy, że mianownik w (19) jest dodatni. Ponadto wyrażenie $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \delta}$ jest dodatnie, zatem $\dot{\hat{y}}$ ma ten sam znak co $\dot{\hat{x}}$.

[13] Oczywiście, jeśli wszystkie cztery parametry są zerami, cała płaszczyzna składa się ze stanów ustalonych, stabilnych w sensie Lapunowa. Ten przypadek jest nieciekawy, gdyż jest to po prostu układ dwóch liniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu w x i y.

wzrostu rosną, przez co zmienne stanu osiągają nieskończone wielkości w skończonym czasie.

Wynik ten można zinterpretować nieformalnie w następujący sposób: wzdłuż wektora własnego związanego z wartością własną, która przekracza zero, zmienne X_i „zawracają". Kiedy ta wartość własna jest dokładnie zerem, jest to ta chwila, w której zmienne te „zatrzymują się i stają się na chwilę stanami ustalonymi".

Rysunek 1. Diagram fazowy w przestrzeni ($\hat{x}$, $\hat{y}$). Jeśli wyznacznik $D \neq 0$, to zerowy stan ustalony $\hat{x} = \hat{y} = 0$ jest jedyny, przy czym gdy $D < 0$ to jest on niestabilny w sensie Lapunowa (jest punktem siodłowym), a gdy $D > 0$ to jest on asymptotycznie stabilny. Gdy warunek „na ostrzu noża" $D = 0$ jest spełniony, mamy *continuum* stanów ustalonych, stabilnych w sensie Lapunowa, ale nie asymptotycznie



Omówiona powyżej bifurkacja może być również zbadana za pomocą diagramów fazowych (rys. 1). Zwróćmy uwagę, że nie należy ona do żadnej z powszechnie znaneych klas bifurkacji (Hopfa, siodło-węzeł, podwojenia okresu, transkrytyczna), i że zerowy stan ustalony nigdy nie jest hiperboliczny.

Uwagi końcowe

W artykule Growca [2007] przedyskutowano wybrane kwestie teoretyczne wiążące się z dwoma przywołanymi tu twierdzeniami „o niemożliwości". Poprzez zestawienie ich z kilkoma nieformalnymi zasadami, które powszechnie respektuje się we współczesnej teorii wzrostu (por. [Temple, 2003], [Jones, 2005]), zwrócono tam uwagę na ich makroekonomiczne konsekwencje. Skonkludowano, że dla założeń „na ostrzu noża", gwarantujących wykładniczy wzrost w długim okresie, alternatywą jest wyjaśnianie długookresowego wzrostu bez odwoływania się do koncepcji ścieżki zrównoważonego wzrostu. Bardzo niewiele zostało jednak zrobione w tym obszarze: zacytować można jedynie Kremera [1993] oraz Jonesa [2001], którzy twierdzą, że historia świata w bardzo długim okresie (od 1 mln p.n.e. u Kremera; od 25000 r. p.n.e. u Jonesa) może zostać objaśniona jak proces przejściowy, a nie zjawisko długookresowe w sensie ścieżki zrównoważonego wzrostu. Stwierdzono też, że twierdzenia 1-2 dyskwalifikują krytykę liniowości jako metodę odrzucania modeli wzrostu, które zawierają liniowe równania różniczkowe, bowiem wszystkie modele, które generują wykładniczy/geometryczny wzrost w długim okresie zawierają warunki „na ostrzu noża".

W niniejszym artykule odniesiono twierdzenia 1-2 do dyskusji na temat źródeł wzrostu w długim okresie. Podkreślono wzajemną odpowiedniość przyjmowanych w modelach wzrostu warunków „na ostrzu noża" z ostatecznymi źródłami wzrostu w długim okresie w tych modelach oraz fakt, że czasami kluczowe warunki „na ostrzu noża" są formułowane w postaci skomplikowanych międzyrównaniowych restrykcji parametrów.

Skrajną wrażliwość wykładniczego/geometrycznego wzrostu na zaburzenia wartości parametrów podkreśla istnienie bifurkacji, zidentyfikowanej w części piątej. Aby uzyskać wykładniczy wzrost, trzeba przyjąć pewien nietypowy zestaw parametrów; minimalna zmiana jednego z nich w dół spowoduje, że długookresowy wzrost zostanie wyeliminowany, zaś minimalna zmiana w górę spowoduje, że wzrost będzie wybuchowy – stopy wzrostu będą rosnąć nieograniczenie. Intuicyjnie rzecz biorąc, świadczy to, że wykładniczy wzrost jest skrajnie „niestabilny", a jego występowanie jest nietypowym zjawiskiem.

Bibliografia

Aghion P., Howitt P., [1998], *Endogenous Growth Theory*, MIT Press, Boston.

Arnold W.I., [1975], *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa.

Barro R.J., Sala-i-Martin X., [1995], *Economic Growth*, MIT Press, Boston.

Christiaans T., [2004], *Types of Balanced Growth*, „Economics Letters" 82(2), s. 253-258.

Connolly M., Peretto P., [2003], *Industry and the Family: Two Engines of Growth*, „Journal of Economic Growth" 8(1), s. 114-148.

Duffy J., Papageorgiou C., [2000], *A Cross-Country Empirical Investigation of the Aggregate Production Function Specification*, „Journal of Economic Growth" 5, s. 87-120.

Eicher T.S., Turnovsky S.J., [July 1999], *Non-Scale Models of Economic Growth*, „Economic Journal" 109, s. 394-415.

Growiec J., [2007], *Beyond the Linearity Critique: The Knife-Edge Assumption of Steady-State Growth*, „Economic Theory" 31(3), s. 489-499.

Guckenheimer J., Holmes P., [1983], *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Berlin Heidelberg Springer, New York.

Ha J., Howitt P., [2005], *Accounting for Trends in Productivity and R&D: A Schumpeterian Critique of Semi-Endogenous Growth Theory*, Brown University, Mimeo.

Jones C.I., [1995], *R&D-Based Models of Economic Growth*, „Journal of Political Economy" 103, s. 759-784.

Jones C.I., [1999], *Growth: with or without Scale Effects*, „American Economic Review Papers and Proceedings" 89, s. 139-144.

Jones C.I., [2001], *Was an Industrial Revolution Inevitable? Economic Growth Over the Very Long Run*, „The B.E. Journal of Macroeconomics (Advances)", 1(2), Article 1.

Jones C.I., [2003], *Population and Ideas: A Theory of Endogenous Growth*, [w:] *Knowledge, Information, and Expectations in Modern Macroeconomics: In Honor of Edmund S. Phelps*, (red.) P. Aghion, R. Frydman, J. Stiglitz, M. Woodford, Princeton University Press, Princeton.

Jones C.I., [2005], *Growth and Ideas*, [w:] *Handbook of Economic Growth*, (red.) P. Aghion, S.N. Durlauf, North-Holland, Amsterdam.

Kortum S., [1997], *Research, Patenting, and Technological Change*, „Econometrica" 65(6), s. 1389-1419.

Kremer M., [1993], *Population Growth and Technological Change: From One Million BC to 1990*, „Quarterly Journal of Economics" 108(3), s. 681-716.

Laffargue J.-P., [2004], *A Sufficient Condition for the Existence and the Uniqueness of a Solution in Macroeconomic Models with Perfect Foresight*, „Journal of Economic Dynamics and Control" 28, s. 1955-1975

Li C.W., [March 2000], *Endogenous vs. Semi-Endogenous Growth in a Two-R&D-Sector Model*, „Economic Journal" 110, C109-C122.

Lucas R.E., [1988], *On the Mechanics of Economic Development*, „Journal of Monetary Economics" 22(1), s. 3-42.

Mincer J., [1974], *Schooling, Experience, and Earnings*, Columbia University Press, New York.

Romer P.M., [1990], *Endogenous Technological Change*, „Journal of Political Economy" 98, s. 71-102.

Segerstrom P.S., [2000], *The Long-Run Growth Effects of R&D Subsidies*, „Journal of Economic Growth" 5, s. 277-305.

Strulik H., [2005], *The Role of Human Capital and Population Growth in R&D-Based Models of Economic Growth*, „Review of International Economics" 13, s. 129-145.

Temple J., [2003], *The Long-Run Implications of Growth Theories*, „Journal of Economic Surveys" 17(3), s. 497-510.

Uzawa H., [1961], *Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium*, „Review of Economic Studies" 28(2), s. 117-124.

Uzawa H., [1965], *Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth*, „International Economic Review" 6, s. 18-31.

Young A., [1998], *Growth without Scale Effects*, „Journal of Political Economy" 106, s. 41-63.

THE ‘KNIFE-EDGE’ CONDITIONS OF BALANCED GROWTH

Summary

In a previous paper, Growiec (2007) showed that conventional growth models do not satisfactorily explain exponential/geometric growth. A balanced growth path with strictly positive rates requires “knife-edge conditions,” Growiec says. This is because balanced growth paths are fragile and sensitive to the smallest disturbances in parameter values.

Growiec’s latest paper, which deals with the “knife-edge” conditions of balanced growth, looks at this theoretical approach in the context of other growth models found in literature on the subject. The author’s approach sheds new light on the ongoing debate on the sources of economic growth.

Keywords: long-run growth, balanced growth path, knife-edge conditions