1 Model poszukiwań na rynku pracy

1.1 Sformułowanie i rozwiązanie problemu programowania dynamicznego z dyskretnym zbiorem wartości

Bezrobotny otrzymuje w każdym okresie $t = 0, 1, ...$ ofertę pracy z wynagrodzeniem w, gdzie w jest zm. losową, $w \sim U[a, b]$. $b > a > 0$. Zatrudniony może zostać zwolniony z prawdopodobieństwem λ. Maksymalizujemy zdyskontowaną stopą β sumę przyszłych płac.

Zdefiniujemy fukcję wartości dla tego zagadnienia:

$$\begin{aligned} V_o(w) &= \max\{V_u(w), V_e(w)\}, \\ V_u(w) &= \beta E V_o, \\ V_e(w) &= w + \beta\lambda E V_o + \beta(1-\lambda)V_e(w), \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $V_u(w)$ jest funkcją wartości, jeśli odrzucimy ofertę (pozostaniemy bezrobotni), a $V_e(w)$ jest f.wartości jeśli ofertę w przyjmiemy. $V_o(w)$ jest funkcją wartości w momencie nadejścia oferty (wylosowania w). Po prostych przekształceniach ostatniego równania mamy:

$$V_e(w) = \frac{w + \beta\lambda E V_o}{1 - \beta(1-\lambda)}. \tag{2}$$

Ponieważ $V_u(w)$ jest stałą funkcją w, zaś $V_e(w)$ – liniową, rosnącą funkcją w, to wykres $V_o(w)$ jest łamaną. Płacę R, dla której $V_u(R) = V_e(R)$ (dla której przecinają się wykresy obu funkcji), czyli dla której decydent jest indyferentny między przyjęciem oferty pracy a odrzuceniem nazywamy płacą progową (*reservation wage*). W tym przypadku, korzystając z (1) i (2), uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \beta E V_o &= \frac{R + \beta\lambda E V_o}{1 - \beta(1-\lambda)} \\ &\Downarrow \\ R &= \beta(1-\beta)(1-\lambda) E V_o. \end{aligned} \tag{3}$$

Pozostaje zadanie wyznaczenia $I = EV_o$. Jest to możliwe, gdyż znamy rozkład

w. Mamy:

$$\begin{aligned} I &= EV_o = \int_{-\infty}^{+\infty} V_o(w)dF(w) = \frac{1}{b-a}\int_a^b V_o(w)dw = \\ &= \frac{1}{b-a}\int_R^b (V_e(w)-V_u(R))dw + V_u(R) = \frac{1}{b-a}\int_R^b (\frac{w+\beta\lambda I}{1-\beta(1-\lambda)} - \beta I)dw + \beta I. \end{aligned}$$

Wyrażenie $I = EV_o$ wewnątrz całki nie przeszkadza, bo to stała. Po wycałkowaniu względem w dostajemy:

$$\begin{aligned} (1-\beta)I &= \frac{1}{(b-a)(1-\beta(1-\lambda))}\left(\frac{1}{2}(b^2-R^2) - I\beta(1-\beta)(1-\lambda)(b-R)\right) \\ &\Downarrow \\ (1-\beta)I &= \frac{\frac{1}{2}(b^2-R^2)}{b-a-\beta(1-\lambda)(R-a)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wstawiając (4) do (3) i rozwiązując równanie kwadratowe uzyskujemy poziom płacy progowej w tym modelu:

$$\begin{aligned} R &= \beta(1-\lambda)\frac{\frac{1}{2}(b^2-R^2)}{b-a-\beta(1-\lambda)(R-a)} \\ &\Downarrow \\ 0 &= R^2 - 2\psi R + 1, \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie

$$\psi = a + \frac{b-a}{\beta(1-\lambda)}.$$

Ostatecznie, mamy dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} R_1 &= \psi - \sqrt{\psi^2 - 1} \\ R_2 &= \psi + \sqrt{\psi^2 - 1} \end{cases} \tag{6}$$

Widać, że oba pierwiastki, jeśli są rzeczywiste, to są dodatnie ($\psi > 0$). Jako *reservation wage* wybierzemy mniejszy z nich. Oczywiście warto też zastanowić się, kiedy wyrażenie pod pierwiastkiem ma sens w ciele liczb rzeczywistych (tzn. kiedy płaca progowa jest liczbą rzeczywistą). Jest tak, gdy $\psi > 1$, czyli gdy:

$$b > \beta(1-\lambda) - a(1-\beta(1-\lambda)).$$

Oznacza to, że rozkład prawdopodobieństwa w nie może być skoncentrowany na zbyt wąskim odcinku zbyt blisko 0. W szczególności dla $a \geq 1$ powyższa nierówność jest zawsze spełniona.

1.2 Przypadek $\lambda = 1$

Jeśli $\lambda = 1$ to na mocy równania (3) mamy $R = 0$. Interpretacja tego faktu jest jasna: jeśli w dowolnym okresie mam do wyboru 0 lub więcej, wybiorę więcej. Wybierając więcej nic nie tracę, gdyż mam gwarancję, że w następnym okresie znajdę się w identycznej sytuacji. Mamy:

$$\begin{aligned} V_o(w) &= V_e(w) \\ V_e(w) &= w + \beta E V_e, \end{aligned} \tag{7}$$

zatem oczywiście

$$\begin{aligned} EV_o &= EV_e = E[w + \beta EV_e] = \frac{a+b}{2} + \beta EV_e \\ &\Downarrow \\ EV_o &= \frac{a+b}{2(1-\beta)} \Bigg(= Ew(1 + \beta + \beta^2 + ...)\Bigg). \end{aligned} \tag{8}$$