Optymalizacja zaawansowana
Wykład 9

Jakub Growiec

SGH

Semestr zimowy 2019-20

Rozdział 1. Podstawowe pojęcia

- (u_t) – ścieżka czasowa zmiennych sterujących
- (x_t) – ścieżka czasowa zmiennych stanu

- T **skończone:** skończony horyzont planowania: $(u_t), (x_t) \in \mathbb{R}^T$
- T **nieskończone:** nieskończony horyzont planowania: $(u_t), (x_t) \in \ell_\infty$

- Zmienne stanu związane są **równaniem ruchu**

$$x_{t+1} = m_t(x_t, u_t), \qquad \forall t.$$

- **Problem decyzyjny.** Decydent maksymalizuje

$$W_t = \sum_{s=t}^{T-1} f_s(x_s, u_s),$$

gdzie x_0, T, x_T są dane, lub

$$W_t = \sum_{s=t}^{\infty} f_s(x_s, u_s),$$

gdzie x_0 jest dane.

- **Kontynuacja.** Kontynuacją ciągu zmiennych sterujących nazywamy ciąg

$$u_{t,T-1} = \{u_s : s = t, t+1, ..., T-1\}$$

lub odpowiednio

$$u_{t,\infty} = \{u_s : s = t, t+1, ...\}.$$

- Wartość x_t oraz kontynuacja ciągu zmiennych sterujących implikują kontynuację ciągu zmiennych stanu:

$$x_{t+1,T} = \{x_s : s = t+1, t+2, ..., T\}$$

lub odpowiednio

$$x_{t+1,\infty} = \{x_s : s = t+1, t+2, ...\}.$$

- Kontynuacją nazywamy

$$z_{t,T} = \{(u_{t,T-1}, x_{t+1,T})\}$$

lub

$$z_{t,\infty} = \{(u_{t,\infty}, x_{t+1,\infty})\}.$$

- Niech $\Phi(x_t)$ oznacza **zbiór dopuszczalnych kontynuacji** ($z_{t,T}$ lub $z_{t,\infty}$) wychodzących z x_t.
- Uwaga: $z_{t,T}|_a^b$ – skończony podciąg $z_{t,T}$ pomiędzy a a b.

- **Założenia programowania dynamicznego.**
  1. **addytywna separowalność** funkcji celu, $W_t = \sum_{s \geq t} f_s(x_s, u_s)$,
  2. f_t, m_t zależą tylko od bieżących wartości zmiennych, tj. $f_t(x_t, u_t)$ oraz $m_t(x_t, u_t)$,
  3. x_{t+1} zależy tylko od zmiennych opóźnionych o 1 okres (własność Markowa).

- **Funkcja wartości.**
  1. **T – skończone.** Wtedy $V(x_t, t, x_T, T) = \max_{u_{t,T-1}} W[z_{t,T}]$ pod warunkiem, że $\forall (s \geq t)\ x_{s+1} = m_s(x_s, u_s)$ oraz t, T, x_t, x_T są dane, oraz $(x_s, u_s) \in C_s \subset \mathbb{R}^2$
  2. **T – nieskończone.** Wtedy $V(x_t, t) = \max_{u_{t,\infty}} W[z_{t,\infty}]$ pod warunkiem, że $\forall (s \geq t)\ x_{s+1} = m_s(x_s, u_s)$ oraz t, x_t są dane, oraz $(x_s, u_s) \in C_s \subset \mathbb{R}^2$.

- **Czy funkcja wartości istnieje?**
  1. Jeśli T – skończone, to $W : \mathbb{R}^{2(T-1)} \to \mathbb{R}$. Jeśli dodatkowo f_s są ciągłe, to W – ciągła.
  2. Zbiór dopuszczalnych ciągów wartości zmiennych jest przecięciem zbiorów domkniętych (zadanych przez $x_{s+1} = m_s(x_s, u_s)$), a więc jest domknięty.
  3. Jeśli dodatkowo zbiór C_s jest ograniczony dla każdego $s \geq t$, to zbiór dopuszczalnych kontynuacji jest zwarty i istnienie maksimum wynika z twierdzenia Weierstrassa.
- Dla T – nieskończonego, istnienie funkcji wartości wymaga spełnienia dodatkowych warunków i dłuższego dowodu.

- **Zasada optymalności Bellmana (1).** Niech $z^*_{t,T} = \{(u^*_{t,T-1}, x^*_{t+1,T})\}$ będzie rozwiązaniem optymalnym. Wtedy rozwiązanie optymalne problemu

$$V(x_a^*, a, x_b^*, b) = \max_{u_{a,b-1}} W[z_{a,b-1}]$$

jest równe $z_{t,T}|_a^b$.

- **Zasada optymalności Bellmana (2).** Niech $z^*_{t,\infty} = \{(u^*_{t,\infty}, x^*_{t+1,\infty})\}$ będzie rozwiązaniem optymalnym. Wtedy rozwiązanie optymalne problemu

$$V(x_a^*, a, x_b^*, b) = \max_{u_{a,b-1}} W[z_{a,b-1}]$$

jest równe $z_{t,\infty}|_a^b$.

- **Intuicja.** Każda część optymalnego planu jest również optymalna jako całość.
- **Wniosek.** Rozwiązanie optymalne jest spójne czasowo. Można do problemu optymalizacyjnego podchodzić sekwencyjnie, rozbijając go na sekwencję problemów jednookresowych.

- Jak rozbić problem na sekwencję problemów jednookresowych?

$$W[z_{t,T}] = f_t(x_t, u_t) + \sum_{s=t+1}^{T-1} f_s(x_s, u_s) = f_t(x_t, u_t) + W[z_{t+1,T}].$$

$$W[z_{t,\infty}] = f_t(x_t, u_t) + \sum_{s=t+1}^{\infty} f_s(x_s, u_s) = f_t(x_t, u_t) + W[z_{t+1,\infty}].$$

- Zatem

$$V(x_t, t, X_T, T) = \max_{u_t, u_{t+1,T-1}} \{f_t(x_t, u_t) + W[z_{t+1,T}]\}.$$

$$V(x_t, t) = \max_{u_t, u_{t+1,\infty}} \{f_t(x_t, u_t) + W[z_{t+1,\infty}]\}.$$

- **Równanie Bellmana.**

$$V(x_t, t, X_T, T) = \max_{u_t}\{f_t(x_t, u_t) + V(x_{t+1}, t+1, x_T, T)\}.$$

$$V(x_t, t) = \max_{u_t}\{f_t(x_t, u_t) + V(x_{t+1}, t+1)\}.$$

- **Fakt.** Równanie Bellmana jest rekurencyjne.

- **Funkcja polityki** $u_t^*(x_t)$

$$u_t^*(x_t) = \arg\max_{u_t}\{f_t(x_t, u_t) + V(x_{t+1}, t+1, x_T, T)\}.$$

$$u_t^*(x_t) = \arg\max_{u_t}\{f_t(x_t, u_t) + V(x_{t+1}, t+1)\}.$$

- **Fakt.** Na równanie Bellmana możemy patrzeć albo jak na równanie dynamiczne, albo też jak na równanie funkcyjne nieznanej funkcji V.

  Zastosowania równania Bellmana:
- T – skończone $\Rightarrow$ **indukcja wsteczna** $(T, T-1, T-2, ..., t)$.
- T – nieskończone $\Rightarrow$ **równanie Eulera; iteracja funkcji wartości** (*value function iteration*, VFI).

- Zadanie 1. Rozwiąż metodą indukcji wstecznej: $\max_{c_{0,2}} \sum_{t=0}^{2} \ln c_t$ pod warunkiem $s_{t+1} = (s_t - c_t)(1+r)$, $r > 0$, ponadto s_0 – dane, $0 \leq c_t \leq s_t \; \forall t = 0, 1, 2$.
- Zadanie 2. Rozwiąż metodą indukcji wstecznej oraz metodą Lagrange'a: $\max_{c_{1,3}} \sum_{t=1}^{3} U_t$, gdzie $U_1 = \ln(c_1 c_2 c_3)$, $U_2 = \ln(c_2 c_3)$, $U_3 = \ln c_3$, pod warunkiem $A_{t+1} = A_t - c_t$, ponadto A_1 – dane, $A_4 \geq 0$, $0 \leq c_t \leq A_t \; \forall t = 1, 2, 3$. Porównaj rozwiązania. Co się stało?

- Zadanie 3. Danych jest 11 miast: A, B, C, D, B', C', D', B'', C'', D'' i E. Niektóre miasta są połączone drogami, następującej długości: $|AB| = 4$, $|AC| = 3$, $|AD| = 3$, $|BC| = 2$, $|CD| = 2$, $|BB'| = 5$, $|CC'| = 3$, $|DD'| = 2$, $|B'C'| = 3$, $|C'D'| = 1$, $|B'B''| = 25$ (wysoka górska przełęcz), $|C'C''| = 3$, $|D'D''| = 4$, $|B''C''| = 5$, $|C''D''| = 4$, $|B''E| = 3$, $|C''E| = 5$, $|D''E| = 3$. Niech funkcja wartości $V(M)$ oznacza odległość między danym miastem M oraz E. Korzystając z indukcji wstecznej, znajdź najkrótszą trasę z A do E.

- **Twierdzenie o obwiedni** (*envelope theorem*). Niech $F(\alpha) = \max_{x \in X} f(x, \alpha)$, gdzie f-różniczkowalna, X-otwarty. Wtedy:

$$\frac{d}{d\alpha} F(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha).$$

- **Problem stacjonarny z nieskończonym horyzontem planowania.** Niech $m_s = m, C_s = C$ (postaci funkcyjne autonomiczne, tj. niezmienne w czasie). Niech ponadto $f_s(x_s, u_s) = \beta^s f(x_s, u_s)$, gdzie $\beta \in (0, 1)$ –dyskontowanie geometryczne.
  Wtedy równanie Bellmana przyjmuje postać:

$$V(x_t) = \max_{u_t} \{f(x_t, u_t) + \beta V(x_{t+1})\}.$$

  Ponadto funkcja wartości $V(x_t)$ oraz funkcja polityki $u^*(x_t)$ są niezmienne w czasie.

- **Operator Bellmana** $T : X \to X$, gdzie X - przestrzeń funkcji $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$T(v(x)) = \max_u \{f(x,u) + \beta v(m(x,u))\}, \quad (x,u) \in C.$$

- Przy tych oznaczeniach, operator Bellmana spełnia:

$$V(x) = T(V(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- **Funkcja wartości jest punktem stałym operatora Bellmana.**

- Uwaga. Programowanie dynamiczne jest użyteczne również w przypadku problemów stochastycznych: $x_{t+1} = m(x_t, u_t, \varepsilon_{t+1})$. Wtedy równanie Bellmana przyjmuje postać:

$$V(x_t) = \max_{u_t}\{f(x_t, u_t) + \beta E_t V(x_{t+1})\} =$$

$$= \max_{u_t}\left\{f(x_t, u_t) + \beta \int_{\Omega} V(y) dG(y; x_t, u_t)\right\},$$

gdzie $P(x_{t+1} \leq y | x_t, u_t) = G(y; x_t, u_t)$ dla wszystkich $y \in \Omega$.

- **Wiemy, że jeśli funkcja wartości istnieje, to spełnia równanie Bellmana. Czy spełniona jest też zależność odwrotna?**
- Oznaczenie: $u_s \in \Gamma(x_s)$ – zbiór wartości dopuszczalnych zmiennej sterującej.
- **Twierdzenie.** Niech $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie rekurencyjne
$$V(x) = \max_{u \in \Gamma(x)} \{f(x,u) + \beta V(y)\} \qquad p.w. \qquad y = m(x,u).$$
Niech ponadto V spełnia warunek ograniczoności:
$$\lim_{n \to \infty} \beta^n V(x_n) = 0$$
dla każdej dopuszczalnej kontynuacji. Załóżmy ponadto, że istnieje kontynuacja $z^*_{t,\infty}$, gdzie u^*_s jest rozwiązaniem
$$V(x_s) = \max_{u_s \in \Gamma(x_s)} \{f(x_s,u_s) + \beta V(m(x_s,u_s))\}$$
dla każdego $s \geq t$ oraz $x^*_{s+1} = m(x^*_s, u^*_s)$.
Wtedy V jest funkcją wartości, a $z^*_{t,\infty}$ jest rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego:
$$V(x_t) = \max_{u_{t,\infty}} \{W[z_{t,\infty}] \; p.w. \; x_{s+1} = m(x_s,u_s), \; u_s \in \Gamma(x_s) \; \forall s \geq t\}.$$

- Model 1. (Optymalny połów ryb / wycinka lasu)

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad p.w. \quad s_{t+1} - s_t = As_t(\bar{s} - s_t) - c_t.$$

- Model 2. (Model Ramseya z pełną deprecjacją)

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \quad p.w. \quad k_{t+1} = f(k_t) - c_t.$$

- **Warunki transwersalności.** Rozwiązanie optymalne problemu optymalizacyjnego z nieskończonym horyzontem planowania musi spełniać, poza równaniem Eulera, dodatkowo warunek transwersalności postaci:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t s_t V'(s_t) = 0.$$