Optymalizacja zaawansowana
Wykład 8

Jakub Growiec

SGH

Semestr zimowy 2019-20

- Optymalizacja statyczna
  - Skończona liczba n zmiennych $\Rightarrow x \in \mathbb{R}^n$.
- Optymalizacja dynamiczna
  - **Skończony horyzont planowania** (T okresów) $\Rightarrow x \in \mathbb{R}^{nT}$.
    Albo te same metody rozwiązywania, co dla problemów statycznych, albo programowanie dynamiczne – indukcja wsteczna.
  - **Nieskończony horyzont planowania** (∞ okresów) $\Rightarrow x \in \ell_\infty$.
    Programowanie dynamiczne w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych.

- **Pokrycie otwarte zbioru.** Rodzinę $U = \{U_i : i \in I\}$ w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy **pokryciem** zbioru A, jeśli $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Jeśli zbiory $\{U_i\}$ są otwarte, wtedy jest to **pokrycie otwarte.**
- **Zbiór zwarty.** A jest zwarty, jeśli każde pokrycie otwarte zbioru zawiera podpokrycie skończone $\{U_1, ..., U_n\}$.
  Przykład: $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ nie jest zwarty. Niech $U = \{(1/n, 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$. To pokrycie nie ma podpokrycia skończonego.
- **Zbiór ciągowo zwarty.** Zbiór A w przestrzeni metrycznej (X, d) jest ciągowo zwarty, jeśli każdy ciąg $\{x_n\} \subset A$ ma podciąg zbieżny $\{x_{n_k}\}$, $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \bar{x} \in A$.
- **Twierdzenie.** Zbiór A w przestrzeni metrycznej (X, d) jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągowo zwarty.

- **Twierdzenie.** Jeśli $B \subset X$, gdzie B–domknięty, X–zwarty, to B–zwarty.
- **Fakt.** Jeśli zbiór A w przestrzeni metrycznej (X, d) jest zwarty, to jest domknięty i ograniczony.
- **Twierdzenie.** Niech $(X, d), (Y, \rho)$ – przestrzenie metryczne. Niech $f : X \to Y$ będzie ciągła. Wtedy jeśli $C \subset X$ jest zwarty, to $f(C) \subset Y$ także jest zwarty.

Ważny przypadek $X = \mathbb{R}^m$:

- **Twierdzenie Bolzano–Weierstrassa.** Każdy ciąg ograniczony w $\mathbb{R}$, tj. $\{x_n\} \subset [a, b]$ ma podciąg zbieżny. (A zatem odcinek $[a, b]$ jest zwarty.)
- **Twierdzenie Heine–Borela.** Zbiór $A \subset \mathbb{R}^m$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

- **Definicja.** Przestrzenią ℓ_p nazywamy przestrzeń nieskończonych ciągów liczbowych $v = (v_1, v_2, ...)$ z tzw. p-normą, gdzie $p \geq 1$:

$$||v||_p = \left(\sum_{t=1}^{\infty} |v_t|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- **Definicja.** Przestrzenią ℓ_∞ nazywamy przestrzeń nieskończonych ciągów liczbowych $v = (v_1, v_2, ...)$ z normą supremum:

$$||v|| = \sup_{t \geq 1} |v_t|.$$

- Zadanie 1: wykazać, że norma supremum spełnia aksjomaty normy.
- Zadanie 2: wykazać, że $||v(n) - v|| \to 0$ implikuje $\forall (t \geq 1)\ |v_t(n) - v_t| \to 0$, ale nie odwrotnie (zbieżność jednostajna implikuje zbieżność punktową, ale nie odwrotnie).
- Zadanie 3: niech $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : |u_n| \leq 1\ \forall (n \in \mathbb{N})\}$. Wykaż, że istnieje ciąg $(u(k)) \subset E$, który nie ma podciągu zbieżnego w sensie normy supremum, a więc zbiór E nie jest zwarty.
  Porównać $C^m = I \times I \times ... \times I$, gdzie $I = [-1, 1]$, z $C^\infty = I \times I \times ...$.

- Zadanie 4: wykaż, że przestrzeń $B[0,1]$ funkcji ciągłych i ograniczonych $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ z normą

$$||f|| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

nie jest zwarta. Posłuż się rodziną funkcji $f_i(x) = e^{-(x-i)^2}$.

- Zadanie 5: rozważ przestrzeń E ciągów nieskończonych $v = (v_1, v_2, ...)$, z metryką

$$d(u,v) = \sum_{n \geq 0} \frac{\min\{1, |u_n - v_n|\}}{2^n}.$$

Wykaż, że d jest poprawnie zdefiniowaną metryką. Wykaż, że dla tej metryki zbieżność punktowa jest równoważna jednostajnej. Wykaż, że (E,d) jest zwarta.

- **Definicja.** Kulą (domkniętą) w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy zbiór

$$B_r(x) = \{u \in X : d(u, x) \leq r\}.$$

- **Definicja.** Kulą (domkniętą) w przestrzeni unormowanej $(X, ||\cdot||)$ nazywamy zbiór

$$B_r(x) = \{u \in X : ||u - x|| \leq r\}.$$

- Zadanie 6: zdefiniuj kule jednostkowe $B_1(0)$ w ℓ_∞ oraz (E, d) z poprzedniego przykładu.
- Zadanie 7: wykaż, że kula jednostkowa w przestrzeni unormowanej jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń jest skończenie wymiarowa.

- **Równoważność norm w $\mathbb{R}^n$.** Każde dwie normy $||\cdot||_a$ i $||\cdot||_b$ okrelone w przestrzeni skończenie wymiarowej $\mathbb{R}^n$ są równoważne, tj. istnieją liczby $0 < C_1 \leq C_2$ takie, że:

$$\forall(x \in \mathbb{R}^n)\ C_1||x||_b \leq ||x||_a \leq C_2||x||_b.$$

  Dla przestrzeni nieskończenie wymiarowych tak już nie jest.
- **Ciąg Cauchy'ego** $\{x_n\}$:

$$\forall(\epsilon > 0)\ \exists\tilde{n}\ \forall(m, n \geq \tilde{n}) \quad d(x_n, x_m) \leq \epsilon.$$

- **Przestrzeń zupełna.** Przestrzeń metryczna (X, d) jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego $\{x_n\} \subset X$ ma granicę w X.
  Przykład: $(0, 1)$ nie jest zupełna. $\mathbb{R}^n$ jest zupełna. ℓ_p, ℓ_∞ są zupełne, $B[0, 1]$ – zupełna.
- **Fakt.** Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, $A \subset X$ zwarty, to A–zupełny.
- **Fakt.** Jeśli (X, d) jest zupełna, $A \subset X$ domknięty, to A–zupełny.

- **„Skończenie wymiarowe twierdzenie Tichonowa".** Niech (X, d_1) oraz (Y, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi. Zdefiniujmy $(X \times Y, d_\pi)$ tak, że

$$d_p i(z, z') = \sqrt{d_1^2(x, x') + d_2^2(y, y')}$$

(jest to tzw. metryka produktowa). Wtedy X, Y są zwarte wtedy i tylko wtedy, gdy $X \times Y$ jest zwarta.

- **Fakt.** Stwierdzenie to łatwo uogólnić do n wymiarów, $(X_1 \times ... \times X_n) \times X_{n+1}$.
- Jest też „prawdziwe" twierdzenie Tichonowa dla przestrzeni nieskończenie wymiarowych.

Rozdział 4. Przestrzenie skończenie i nieskończenie wymiarowe – cd.

- Zadanie 8: znajdź $\max \sum_{t=1}^{n} v_t$ na kuli $B_r(0) \in \mathbb{R}^n$. Oblicz wartość maksymalną dla ustalonego n. Przejdź do granicy $n \to \infty$. Czy coś się zmieniło?