Optymalizacja zaawansowana
Wykład 4

Jakub Growiec

SGH

Semestr zimowy 2019-20

- Dla funkcji różniczkowalnych $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^n$,

$$\bigtriangledown_h f(\bar{x}) =< \bigtriangledown f(\bar{x}), h >= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) h_i.$$

- Gradient jest kierunkiem najszybszego wzrostu funkcji.
- Warstwica funkcji jest (lokalnie) prostopadła do gradientu. Wzór dla (hiper)płaszczyzny stycznej:

$$f(\bar{x} + h) \approx y = f(\bar{x}) + < \bigtriangledown f(\bar{x}), h >,$$

a więc

$$f(\bar{x} + h) \approx f(\bar{x}) \iff < \bigtriangledown f(\bar{x}), h >= 0.$$

- **Twierdzenie.** Niech $C \subset \mathbb{R}^n$, a funkcja $f : C \to \mathbb{R}$. Rozważmy problem

$$(P) \quad \max_{x \in C} f(x).$$

Jeśli punkt $\bar{x} \in C$ jest rozwiązaniem problemu (P) oraz f jest różniczkowalna w $\bar{x}$, to

$$\triangledown f(\bar{x}) \in N_C(\bar{x}).$$

- Zatem w szczególności jeśli rozwiązaniem problemu (P) jest $\bar{x} \in int(C)$, to

$$\triangledown f(\bar{x}) = 0.$$

- **Twierdzenie.** Niech $C \subset \mathbb{R}^n$, a funkcja $f : C \to \mathbb{R}$. Rozważmy problem
$$(Q) \quad \min_{x \in C} f(x).$$
Jeśli punkt $\bar{x} \in C$ jest rozwiązaniem problemu (Q) oraz f jest różniczkowalna w $\bar{x}$, to
$$-\bigtriangledown f(\bar{x}) \in N_C(\bar{x}).$$

- Zatem w szczególności jeśli rozwiązaniem problemu (Q) jest $\bar{x} \in int(C)$, to
$$\bigtriangledown f(\bar{x}) = 0.$$

- Każdy punkt $\bar{x} \in int(C)$, dla którego
$$\bigtriangledown f(\bar{x}) = 0$$
nazywamy punktem krytycznym („podejrzanym o ekstremum”).
- Oczywiście $\bar{x}$ nie musi być ekstremum.
- Aby wykazać, że $\bar{x}$ jest ekstremum, trzeba sprawdzić jeszcze **warunki drugiego rzędu** (warunki wystarczające maksymalizacji).
- Dla funkcji jednej zmiennej, należy ocenić znak $f''(\bar{x})$.
- Dla funkcji n zmiennych, odpowiednikiem jest **określoność macierzy drugiej pochodnej** $D^2 f(\bar{x})$**.**

- Macierz $M_{n\times n}$ jest dodatnio określona, gdy:
  1. $\forall(v \in \mathbb{R}^n) : v^T M v \geq 0$ oraz $v^T M v = 0 \iff v = 0$.
  2. Minory główne $d_1, d_2, ..., d_n$ są dodatnie.
  3. Wszystkie wartości własne M są dodatnie.
- Macierz $M_{n\times n}$ jest półdodatnio określona, gdy:
  1. $\forall(v \in \mathbb{R}^n) : v^T M v \geq 0$.
  2. Wszystkie minory główne są nieujemne (nie tylko $d_1, d_2, ..., d_n$!).
  3. Wszystkie wartości własne M są nieujemne.

- Macierz $M_{n\times n}$ jest ujemnie określona, gdy:
  1. $\forall(v \in \mathbb{R}^n) : v^T Mv \leq 0$ oraz $v^T Mv = 0 \iff v = 0$.
  2. Minory główne nieparzyste $d_1, d_3, \ldots$ są ujemne. Minory główne parzyste $d_2, d_4, \ldots$ są dodatnie.
  3. Wszystkie wartości własne M są ujemne.

- Macierz $M_{n\times n}$ jest półujemnie określona, gdy:
  1. $\forall(v \in \mathbb{R}^n) : v^T Mv \leq 0$.
  2. Wszystkie minory główne nieparzyste są niedodatnie, a parzyste – nieujemne (nie tylko $d_1, d_2, \ldots, d_n$!).
  3. Wszystkie wartości własne M są niedodatnie.

- **Twierdzenie.** Niech $C \subset \mathbb{R}^n$, a funkcja $f : C \to \mathbb{R}$. Rozważmy problem
$$(P) \quad \max_{x \in C} f(x).$$
Weźmy punkt krytyczny będący punktem wewnętrznym zbioru, $\bar{x} \in int(C)$. Jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna w $\bar{x}$ oraz $D^2 f(\bar{x})$ jest ujemnie określona, to $\bar{x}$ jest lokalnym rozwiązaniem problemu (P).

- **Twierdzenie.** Niech $C \subset \mathbb{R}^n$, a funkcja $f : C \to \mathbb{R}$. Rozważmy problem
$$(Q) \quad \min_{x \in C} f(x).$$
Weźmy punkt krytyczny będący punktem wewnętrznym zbioru, $\bar{x} \in int(C)$. Jeśli f jest dwukrotnie różniczkowalna w $\bar{x}$ oraz $D^2 f(\bar{x})$ jest dodatnio określona, to $\bar{x}$ jest lokalnym rozwiązaniem problemu (Q).

- **Twierdzenie.** Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie wypukły, a funkcja $f : U \to \mathbb{R}$. Rozważmy problem
$$(P) \quad \max_{x \in U} f(x).$$
Weźmy punkt krytyczny będący punktem wewnętrznym zbioru, $\bar{x} \in int(U)$. Jeśli f jest wklęsła na U, to $\bar{x}$ jest globalnym rozwiązaniem problemu (P).

- **Twierdzenie.** Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie wypukły, a funkcja $f : U \to \mathbb{R}$. Rozważmy problem
$$(Q) \quad \min_{x \in U} f(x).$$
Weźmy punkt krytyczny będący punktem wewnętrznym zbioru, $\bar{x} \in int(U)$. Jeśli f jest wypukła na U, to $\bar{x}$ jest globalnym rozwiązaniem problemu (Q).

- **Wypukłość i wklęsłość funkcji a macierz drugiej pochodnej.**

- **Twierdzenie.** Niech funkcja $f \in C^2$ odwzorowuje $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gdzie U jest zbiorem otwartym i wypukłym. Wtedy

$$f \text{ wypukła na } U \iff D^2 f(x) \text{ półdodatnio określona na } U.$$

- **Twierdzenie.** Niech funkcja $f \in C^2$ odwzorowuje $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gdzie U jest zbiorem otwartym i wypukłym. Wtedy

$$f \text{ wklęsła na } U \iff D^2 f(x) \text{ półujemnie określona na } U.$$

- Uwaga: dodatnią/ujemną określnoność wystarczy sprawdzić w $\bar{x}$, a półdodatnią/półujemną musimy sprawdzić dla całego wypukłego podzbioru $U \ni \bar{x}$.

- Możliwy algorytm rozwiązywania problemów optymalizacyjnych np.

$$(P) \quad \max_{x \in C} f(x).$$

1. Czy można wykazać istnienie max? (Tw. Weierstrassa? „Koercja"?)
2. Punkty krytyczne w $int(C)$: $\bigtriangledown f(\bar{x}) = 0$.
3. Określoność macierzy $D^2 f(x)$ dla $\bar{x}$ (i potencjalnie jego otoczenia).
4. Punkty nieciągłości f?
5. Czy ekstrema globalne mogą być na brzegu zbioru C? Jeśli tak, to poszukujemy ekstremów także na brzegu. Tam zamiast $\bigtriangledown f(\bar{x}) = 0$ mamy $\bigtriangledown f(\bar{x}) \in N_C(\bar{x})$ (zob. kolejny wykład!).