Optymalizacja zaawansowana
Wykład 3

Jakub Growiec

SGH

Semestr zimowy 2019-20

- **Zbiór wypukły.** Zbiór $C \in \mathbb{R}^n$ jest wypukły, gdy
$$\forall x \in C, y \in C, \lambda \in [0,1]: \; \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$
- **Ćwiczenie.** Wykaż, że zbiór spełniający nieco słabszy warunek:
$$\forall x \in C, y \in C: \; \frac{1}{2}(x+y) \in C$$
nie musi być wypukły.
- **Zbiór ściśle wypukły.** Zbiór $C \in \mathbb{R}^n$ jest ściśle wypukły, gdy
$$\forall x \in clC, y \in clC, \lambda \in (0,1): \; \lambda x + (1-\lambda)y \in intC.$$
- **Podprzestrzeń afiniczna.** Zbiór C jest podprzestrzenią afiniczną, gdy
$$\forall x \in C, y \in C, \lambda \in \mathbb{R}: \; \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

- **Sympleks jednostkowy** to zbiór $S^{n-1} \in \mathbb{R}^n$ postaci

$$S^{n-1} = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

  Sympleks jest wypukły, domknięty, ograniczony (a więc i zwarty).

- **Kombinacja wypukła.** Niech $(x_i)_{i=1}^k$ oznacza k punktów w $\mathbb{R}^n$. Kombinacją wypukłą tych punktów jest każdy punkt $x \in \mathbb{R}^n$ taki, że

$$\exists \lambda \in S^{n-1} \; x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i.$$

- **Kombinacja afiniczna.** Niech $(x_i)_{i=1}^k$ oznacza k punktów w $\mathbb{R}^n$. Kombinacją afiniczną tych punktów jest każdy punkt $x \in \mathbb{R}^n$ taki, że

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^k \; x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

- **Twierdzenie.** Zbiór $C \subset \mathbb{R}^n$ jest wypukły wtt gdy C zawiera wszystkie kombinacje wypukłe skończonych rodzin elementów C.
  Dowód.

- **Twierdzenie.** Zbiór $C \subset \mathbb{R}^n$ jest podprzestrzenią afiniczną wtt gdy C zawiera wszystkie kombinacje afiniczne skończonych rodzin elementów C.

- **Otoczka wypukła** zbioru $C \subset \mathbb{R}^n$, oznaczana jako $co(C)$, jest częścią wspólną wszystkich zbiorów wypukłych w $\mathbb{R}^n$ zawierających C.
- **Otoczka afiniczna** zbioru $C \subset \mathbb{R}^n$, oznaczana jako $Aff(C)$, jest częścią wspólną wszystkich podprzestrzeni afinicznych w $\mathbb{R}^n$ zawierających C.

- **Twierdzenie.** Zbiór $co(C)$ jest zbiorem wszystkich kombinacji wypukłych elementów zbioru C.
  Dowód.
- **Twierdzenie.** Zbiór $Aff(C)$ jest zbiorem wszystkich kombinacji afinicznych elementów zbioru C.

- **Wielościan wypukły** jest otoczką wypukłą zbioru skończonego. (Np. odcinek jest otoczką wypukłą zbioru dwuelementowego. Sympleks jednostkowy jest otoczką wypukłą zbioru n wektorów jednostkowych.)

- **Stożek** z wierzchołkiem $0 \in \mathbb{R}^n$ to zbiór C spełniający

$$\forall x \in C, t \geq 0: \;\; tx \in C.$$

- **Ćwiczenie.** Czy te zbiory są stożkami? Czy są stożkami wypukłymi?

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x, x \geq 0\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1, x \geq 0\}$$
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq ||(x, y)||\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2\}$$

- **Twierdzenie.** Stożek K jest wypukły wtt gdy jest stabilny względem dodawania, tj.

$$\forall x \in K, y \in K \;\; x + y \in K.$$

Dowód.

- **Otoczka stożkowa** zbioru $C \subset \mathbb{R}^n$, oznaczana jako $K(C)$, jest częścią wspólną wszystkich stożków wypukłych w $\mathbb{R}^n$ zawierających C.

- **Stożek styczny** do zbioru $C \in \mathbb{R}^n$ w punkcie $\bar{x}$ to zbiór $T_C(\bar{x})$ wszystkich kierunków stycznych oraz skierowanych do wewnątrz zbioru C.

$$T_c(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n : \exists (x_n) \subset C, (\epsilon_n) \subset \mathbb{R}_+ \quad \lim_{n \to \infty} \frac{x_n - \bar{x}}{\epsilon_n} = d.$$

- $T_C(\bar{x})$ jest stożkiem.
- Jeśli $x \in int(C)$, to $T_C(\bar{x}) = \mathbb{R}^n$ (wszystkie kierunki są „do wewnątrz”).

- **Stożek normalny** do zbioru $C \in \mathbb{R}^n$ w punkcie $\bar{x}$ to zbiór $N_C(\bar{x})$ wszystkich kierunków skierowanych na zewnątrz zbioru C.

$$N_c(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n : \forall w \in T_C(\bar{x}) \quad < w, d > \leq 0\}.$$

- $N_C(\bar{x})$ jest stożkiem.
- Jeśli $x \in int(C)$, to $N_C(\bar{x}) = \{0\}$ (wszystkie kierunki są „do wewnątrz”).
- Jeśli C jest wypukły, to:

$$N_C(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n : \forall x \in C, < x - \bar{x}, d > \leq 0\}.$$