Optymalizacja zaawansowana
Wykład 2

Jakub Growiec

SGH

Semestr zimowy 2019-20

Podstawowe definicje

- Rozważamy następujące problemy optymalizacyjne:

$$(P) \max_{x \in C} f(x).$$

$$(Q) \min_{x \in C} f(x).$$

- Wartością problemu (P) i (Q) są odpowiednio:

$$Val(P) = \sup_{x \in C} f(x),$$

$$Val(Q) = \inf_{x \in C} f(x).$$

- Gdy f jest nieograniczona z góry, to piszemy $Val(P) = +\infty$.
- Gdy f jest nieograniczona z dołu, to piszemy $Val(Q) = -\infty$.

Podstawowe definicje

- **Maksimum globalne.** Punkt $\bar{x} \in C$ jest rozwiązaniem problemu (P), co zapisujemy $\bar{x} \in Sol(P)$, gdy

$$Val(P) = \max_{x \in C} f(x) = f(\bar{x}).$$

- $\forall x \in C \;\; f(x) \leq f(\bar{x})$.

- **Minimum globalne.** Punkt $\bar{x} \in C$ jest rozwiązaniem problemu (Q), co zapisujemy $\bar{x} \in Sol(Q)$, gdy

$$Val(Q) = \min_{x \in C} f(x) = f(\bar{x}).$$

- $\forall x \in C \;\; f(x) \geq f(\bar{x})$.

Podstawowe definicje

- **Maksimum lokalne.** Punkt $\bar{x} \in C$ jest maksimum lokalnym f, gdy

$$\exists \epsilon > 0 \ \forall x \in C \cap B_{\bar{x}}(\epsilon) \quad f(x) \leq f(\bar{x}).$$

- **Maksimum lokalne.** Punkt $\bar{x} \in C$ jest minimum lokalnym f, gdy

$$\exists \epsilon > 0 \ \forall x \in C \cap B_{\bar{x}}(\epsilon) \quad f(x) \geq f(\bar{x}).$$

Podstawowe definicje

- Rozważamy następujące problemy optymalizacyjne:

$$(P)\max_{x\in C} f(x).$$

$$(Q)\min_{x\in C} f(x).$$

- Ciąg $(x_n)\subset C$ jest **ciągiem maksymalizującym**, gdy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = Val(P).$$

- Ciąg $(y_n)\subset C$ jest **ciągiem minimalizującym**, gdy

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = Val(Q).$$

- Ciąg maksymalizujący i minimalizujący zawsze istnieją. Także wtedy, gdy nie istnieją ekstrema globalne.

- **Ćwiczenie.** Znajdź minimum $f(x) = x + \frac{1}{x}$ na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- **Ćwiczenie.** Znajdź minimum $f(x, y) = x^2 + y^2$ na zbiorze $\{(x, y) \in [0, 1]^2 : x + y = 1\}$.
- **Ćwiczenie.** Znajdź wartość, maksimum globalne oraz ciąg maksymalizujący $f(x) = \frac{e^x}{x}$ na zbiorze $[1, 2]$, a także $(0, +\infty)$. Znajdź minimum globalne i lokalne oraz wartość dla problemu minimalizacji tej funkcji.

Rozdział 2. Istnienie rozwiązań problemów optymalizacyjnych

- Teraz wskażmy kryteria, przy których ekstrema funkcji na pewno istnieją.
- **Twierdzenie Weierstrassa.** Niech $f : C \to \mathbb{R}$ będzie ciągła, a $C \in \mathbb{R}^n$ – zwarty. Wtedy problemy optymalizacyjne

$$(P) \max_{x \in C} f(x)$$

$$(Q) \min_{x \in C} f(x)$$

mają (co najmniej jedno) rozwiązanie.

Rozdział 2. Istnienie rozwiązań problemów optymalizacyjnych

- **Twierdzenie.** Niech $f : C \to \mathbb{R}$ będzie ciągła, a $C \in \mathbb{R}^n$ – domknięty (ale nieograniczony). Jeśli f spełnia kryterium „koercji”:

$$\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = +\infty,$$

to problem optymalizacyjny

$$(Q) \min_{x \in C} f(x)$$

ma (co najmniej jedno) rozwiązanie.

- **Twierdzenie.** Niech $f : C \to \mathbb{R}$ będzie ciągła, a $C \in \mathbb{R}^n$ – domknięty (ale nieograniczony). Jeśli f spełnia kryterium „koercji”:

$$\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = -\infty,$$

to problem optymalizacyjny

$$(P) \max_{x \in C} f(x)$$

ma (co najmniej jedno) rozwiązanie.

Rozdział 2. Istnienie rozwiązań problemów optymalizacyjnych

- Twierdzenie Weierstrassa nie działa, gdy
  - f nie jest ciągła, lub
  - zbiór C nie jest domknięty, lub
  - zbiór C nie jest ograniczony, a funkcja f nie spełnia warunku „koercji".
- Przykłady.

- **Funkcja półciągła z góry.** $f : C \to \mathbb{R}$ jest półciągła z góry, jeśli dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ zbiór
$$\{x \in C : f(x) \geq \lambda\}$$
jest domkniętym podzbiorem C.
- **Funkcja półciągła z dołu.** $f : C \to \mathbb{R}$ jest półciągła z dołu, jeśli dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ zbiór
$$\{x \in C : f(x) \leq \lambda\}$$
jest domkniętym podzbiorem C.
- Funkcja jednocześnie półciągła z góry i z dołu jest ciągła.

Rozdział 2. Istnienie rozwiązań problemów optymalizacyjnych

- **Twierdzenie.** Niech $f : C \to \mathbb{R}$ będzie półciągła z dołu, a $C \in \mathbb{R}^n$ – domknięty (ale nieograniczony). Jeśli f spełnia kryterium „koercji”:

  $$\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = +\infty,$$

  to problem optymalizacyjny

  $$(Q) \min_{x \in C} f(x)$$

  ma (co najmniej jedno) rozwiązanie.

- **Twierdzenie.** Niech $f : C \to \mathbb{R}$ będzie półciągła z góry, a $C \in \mathbb{R}^n$ – domknięty (ale nieograniczony). Jeśli f spełnia kryterium „koercji”:

  $$\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = -\infty,$$

  to problem optymalizacyjny

  $$(P) \max_{x \in C} f(x)$$

  ma (co najmniej jedno) rozwiązanie.

- **Ćwiczenie.** Niech $f(x,y) = e^{xy} + x^2 - x + y^2 - 10y$ dla $(x,y) \neq (0,0)$ oraz $f(0,0) = 0$. Wykaż istnienie minimum globalnego.