Optymalizacja zaawansowana
Wykład 11

Jakub Growiec

SGH

Semestr zimowy 2019-20

- Rozważmy problem stochastyczny

$$\max E_t \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} u(c_\tau, s_\tau) \qquad p.w. \qquad s_{\tau+1} = m(c_\tau, s_\tau, \varepsilon_\tau),$$

  gdzie ε_t jest procesem stochastycznym, np. $\varepsilon_t \sim iid\ N(0,\sigma)$ lub $\varepsilon_t \sim \text{AR}(1)$.

- **Stochastyczne równanie Bellmana:**

$$V(s_t, \varepsilon_t) = \max_{c_t}\{u(c_t, s_t) + \beta E_t V_{t+1}(s_{t+1}, \varepsilon_{t+1})\}.$$

- Uwagi:
  - Należy śledzić bieżący zbiór informacyjny (co jest znane w momencie podejmowania decyzji?)
  - Brak *perfect foresight*.
  - Wykorzystujemy zasadę von Neumanna–Morgensterna maksymalizacji oczekiwanej użyteczności.

- **Operator warunkowej wartości oczekiwanej** E_t. Własności:
  - $E_t X_{t+1} = E(X_{t+1}|\Theta_t)$, gdzie Θ_t – zbiór informacyjny. E jest wartością oczekiwaną.
  - $\Theta_t \subset \Theta_{t+1} \subset \Theta_{t+2} \subset \ldots$

  - $E(X+Y) = EX + EY$,
  - $E(aX) = a \cdot EX$,
  - $EXY \neq EX \cdot EY$, chyba że X i Y są nieskorelowane,
  - $Ef(X) \neq f(EX)$, chyba że f jest liniowa;

  - **Prawo iterowanych oczekiwań** (ang. LIE): $E_t X_{t+2} = E_t(E_{t+1} X_{t+2})$.
  - **Reguła Leibniza**:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_X f(x, \alpha) dx = \int_X \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) dx,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} EX_\alpha = E\left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial \alpha}\right).$$

- **Wyprowadzenie równania Eulera** przy założeniu, że ε_t jest znany w chwili podejmowania decyzji o c_t (konwencja czasowa).

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial c_t}}{\frac{\partial m}{\partial c_t}} = \beta E_t \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial c_{t+1}} \cdot \frac{\partial m}{\partial s_{t+1}}}{\frac{\partial m}{\partial c_{t+1}}} - \frac{\partial u}{\partial s_{t+1}} \right).$$

- W szczególności jeśli $\frac{\partial u}{\partial s_{t+1}} = 0$, to:

$$\beta E_t \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial c_{t+1}}}{\frac{\partial u}{\partial c_t}} \frac{\frac{\partial m}{\partial c_t}}{\frac{\partial m}{\partial c_{t+1}}} \frac{\partial m}{\partial s_{t+1}} \right) = 1.$$

- **Podstawowy model RBC** (stochastyczny model Ramseya):

$$\max E_t \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} u(c_\tau) \qquad p.w. \qquad k_{\tau+1} = A_\tau k_\tau^\alpha + (1-\delta)k_\tau - c_\tau,$$

  gdzie $A_t \sim iid\ N(\mu, \sigma)$ jest szokiem technologicznym.

Rozważ m.in. przykład z neutralnością względem ryzyka, $u(c_t) = c_t$. Znajdź i zinterpretuj funkcję polityki.

- **Podstawowy model RBC** (stochastyczny model Ramseya):

$$\max E_t \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} u(c_\tau) \qquad p.w. \qquad k_{\tau+1} = A_\tau k_\tau^\alpha + (1-\delta)k_\tau - c_\tau,$$

gdzie $A_t \sim iid\ N(\mu, \sigma)$ jest szokiem technologicznym.

Rozważ m.in. przykład z neutralnością względem ryzyka, $u(c_t) = c_t$. Znajdź i zinterpretuj funkcję polityki.

- **Podstawowy model wyceny aktywów**. Gospodarstwa domowe rozwiązują problem:

$$\max E_t \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} u(c_\tau) \ p.w. \ k_{\tau+1} = (1+r_\tau)k_\tau^\alpha + \frac{w_\tau}{v_\tau} - \frac{p_\tau}{v_\tau} c_\tau, \ r_\tau = \frac{w_\tau^K}{v_\tau} - \delta,$$

gdzie v_t jest ceną kapitału w jednostkach płacy, a p_t jest ceną dobra konsumpcyjnego w jednostkach płacy. Płaca jest *numeraire*.

- Firmy rozwiązują problem statyczny:

$$\max_{K,L} \Pi(K, L) = pF(K, L) - w^K K - wL.$$

- W skali całej gospodarki, $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + F(K_t, L_t) - C_t$.

Co dalej?? Równanie Eulera nie daje funkcji polityki ani funkcji wartości. Jak „rozwiązać" model?

1. Metoda iteracji funkcji wartości. Iterujemy operator Bellmana T w celu znalezienia punktu stałego – funkcji wartości:

$$v_0(s) \to v_1(s) = T(v_0(s)) \to v_2(s) = T(v_1(s)) \to \ldots$$

Co dalej?? Równanie Eulera nie daje funkcji polityki ani funkcji wartości. Jak „rozwiązać” model?

1. Metoda iteracji funkcji wartości. Iterujemy operator Bellmana T w celu znalezienia punktu stałego – funkcji wartości:

$$v_0(s) \to v_1(s) = T(v_0(s)) \to v_2(s) = T(v_1(s)) \to \dots$$

2. Analiza modelu zloglinearyzowanego (częsta np. w literaturze DSGE)
   - deterministyczny stan ustalony
   - log-linearyzacja równania Bellmana i równania ruchu wokół deterministycznego stanu ustalonego
   - rekursywne równanie ruchu (RLOM)
   - funkcje reakcji na impuls (IRF)
   - porównanie charakterystyk danych symulowanych oraz rzeczywistych („momenty”)

Deterministyczny stan ustalony

- $c_{t+1} = c_t \quad \forall t \geq 0,$
- $s_{t+1} = s_t \quad \forall t \geq 0,$
- ignorujemy losowość: $Ex_{t+1} = x_{t+1}$

Deterministyczny stan ustalony

- $c_{t+1} = c_t \quad \forall t \geq 0$,
- $s_{t+1} = s_t \quad \forall t \geq 0$,
- ignorujemy losowość: $Ex_{t+1} = x_{t+1}$

Loglinearyzacja

- $x_t = \bar{x} \cdot \frac{x_t}{\bar{x}} = \bar{x} e^{\ln(x_t/\bar{x})} = \bar{x} e^{\hat{x}_t}$,
- $\ln x_t = \ln \bar{x} + \hat{x}_t$,
- $e^{\hat{x}_t} \approx 1 + \hat{x}_t$,
- $(1 + \hat{x}_t)^\alpha \approx 1 + \alpha \hat{x}_t$,
- $\hat{x}_{1t} \cdot \hat{x}_{2t} \approx 0$,
- ... a zatem ...
- $x_t \approx \bar{x}(1 + \hat{x}_t)$,
- $x_{1t} x_{2t} \approx \bar{x}_1 \bar{x}_2 (1 + \hat{x}_{1t} + \hat{x}_{2t})$,
- $x_t^\alpha \approx \bar{x}^\alpha (1 + \alpha \hat{x}_t)$.

- **Przykład**. Podstawowy model RBC

$$\begin{cases} E_t\left(\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\beta(\alpha A_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}+(1-\delta))\right)=1, \\ k_{t+1}=A_t k_t^{\alpha}+(1-\delta)k_t-c_t, \\ u(c)=\ln c. \end{cases}$$

Po loglinearyzacji,

$$\begin{cases} \hat{c}_t-E_t\hat{c}_{t+1}+(1-\beta(1-\delta))E_t\hat{A}_{t+1}+(\alpha-1)(1-\beta(1-\delta))\hat{k}_{t+1}=0, \\ \hat{k}_{t+1}=\left(\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1-\delta}{\alpha}\right)\hat{A}_t+\frac{1}{\beta}\hat{k}_t-\left(\delta-\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1-\delta}{\alpha}\right)\hat{c}_t. \end{cases}$$

Uwagi.

- Po linearyzacji znikają stałe i czynniki nieliniowe.
- Wstawiając $\hat{x} = 0$ dla wszystkich x uzyskujemy „$0 = 0$".
- Równania opisują zachowanie układu po (dostatecznie małym) wytrąceniu go z deterministycznego stanu ustalonego.
- Loglinearyzacja „zamienia iloczyny na sumy", umożliwiając rozbicie operatora wartości oczekiwanej:

$$EXY \neq EX \cdot EY, \qquad \text{ale} \qquad E(X+Y) = EX + EY.$$