# Optymalizacja zaawansowana
# Wykład 10

Jakub Growiec

SGH

Semestr zimowy 2019-20

- **Odwzorowanie zwężające.** Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną, $T : X \to X$. Mówimy, że $T$ jest odwzorowaniem zwężającym (kontrakcją) z modułem $\beta \in (0, 1)$, jeśli

$$\forall (x, y \in X) \quad d(T(x), T(y)) \leq \beta d(x, y).$$

- Przykład. Warunek dla funkcji różniczkowalnych $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ to $|T'(x)| \leq \beta$.
- **Fakt.** Każde odwzorowanie zwężające jest ciągłe.

- **Twierdzenie Banacha o punkcie stałym.** Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech $T : X \to X$ będzie odwzorowaniem zwężającym z modułem $\beta \in (0, 1)$. Wtedy:
  - (a) $T$ ma dokładnie jeden punkt stały, $x^* = T(x^*)$,
  - (b) ciąg $\{x_0, T(x_0), T(T(x_0)), ...\}$ zbiega do $x^* \in X$ dla każdego $x_0 \in X$.
- **Dowód** (ważny!).

- Uwaga 1: Punkt (b) definiuje *metodę kolejnych przybliżeń*.
- Uwaga 2: Przestrzeń unormowana i zupełna = *przestrzeń Banacha*.

- **Twierdzenie o ciągłej zależności punktu stałego od parametrów.** Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną zupełną (przestrzenią „zmiennych"), a $(\Omega, \rho)$ – będzie przestrzenią metryczną zupełną (przestrzenią „parametrów"). Niech $T : X \times \Omega \to X$, zapisywana jako $T(x, \alpha)$, będzie:
  - (a) ciągła względem $\alpha$,
  - (b) dla każdego $\alpha \in \Omega$, niech $T(x, \alpha) = T_\alpha(x)$ będzie odwzorowaniem zwężającym.

  Wtedy $x^*(\alpha)$, gdzie $x^* : \Omega \to X$, tj. punkt stały traktowany jako funkcja parametrów, jest funkcją ciągłą.
- **Dowód** (ważny!).

- **Twierdzenie Blackwella.** Warunki wystarczające, by odwzorowanie było zwężające. Niech $B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ będzie zbiorem funkcji ciągłych i ograniczonych z normą supremum $||\cdot||$, tj. $||f|| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$. Jeśli operator $T : B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ spełnia
  1. **monotoniczność**: $\forall (f, g) \in B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
  $$\forall (x \in \mathbb{R}^n)\ f(x) \leq g(x) \Rightarrow \forall (x \in \mathbb{R}^n)\ \ T(f(x)) \leq T(g(x)),$$
  2. **dyskontowanie**: $\exists (\beta \in (0, 1))$
  $$\forall (f \in B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n, \alpha \geq 0) \quad T(f(x) + \alpha) \leq T(f(x)) + \beta\alpha,$$

  wtedy $T$ jest zwężający.

- **Przypomnijmy równanie Bellmana.**

$$V(x_t) = \max_{u_t \in \Gamma(x_t)} \{f(x_t, u_t) + \beta V(x_{t+1})\}, \qquad x_{t+1} = m(x_t, u_t).$$

- **Operator Bellmana:**

$$T(V(x)) = \max_{u \in \Gamma(x)} \{f(x, u) + \beta V(m(x, u))\}.$$

- Jeśli operator Bellmana $T : B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ jest odwzorowaniem zwężającym, a $\Gamma(x)$ jest zwarty, to istnieje dokładnie jeden punkt stały $V^* \in B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

- **Twierdzenie (wniosek z tw. Banacha i Blackwella).** Niech
  - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i ograniczona;
  - $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ będzie ciągła,
  - zbiór $\Gamma(x)$ będzie niepusty, zwarty i zależny od $x$ w sposób ciągły,

  wtedy $T : B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ jest odwzorowaniem zwężającym, a więc posiadającym dokładnie jeden punkt stały $V^* \in B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Funkcja $V^*$ **jest funkcją wartości** dla rozważanego problemu optymalizacyjnego.

- Aplikacja do modelu (1): model połowu ryb / wycinki lasu.
- Aplikacja do modelu (2): model Ramseya.

- **Model**. Rozważmy następujący model poszukiwań na rynku pracy:
  - W każdym momencie $t = 0, 1, 2, \ldots$ do osoby bezrobotnej napływa oferta pracy $w_t$, gdzie $w_t \sim U[a, b]$.
  - Decyzja: przyjąć lub odrzucić.
  - Osoba zatrudniona może zostać zwolniona z egzogenicznym prawdopodobieństwem $\lambda > 0$.
  - Osoba maksymalizuje oczekiwaną zdyskontowaną sumę płac,

$$\max E_0 \left( \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t w_t \right).$$

- **Zadanie**. Niech $\alpha \in (0,1), \beta \in (0,1), k_0 > 0$. Rozważmy następujący problem optymalizacyjny:

$$V(k_0) = \sup_{(k_t)_{t \in N}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(k_t^\alpha - k_{t+1}), \qquad (\forall t \in \mathbb{N})\ 0 < k_{t+1} < k_t^\alpha.$$

1. Przypomnij, dlaczego szereg $\sum_{t=0}^{\infty} t\beta^t$ jest zbieżny.
2. Dla każdego $k > 0$ niech $C(k) = \{(k_t)_{t \in N} : k_0 = k,\ (\forall t \in \mathbb{N})\ 0 < k_{t+1} < k_t^\alpha\}$ będzie zbiorem decyzji dopuszczalnych. Wykaż, że dla każdego $(k_t)_{t \in N} \in C(k)$ funkcja celu jest poprawnie zdefiniowana (suma istnieje i jest skończona).
3. Dla każdej funkcji $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, zdefiniujmy nową funkcję $T(f)$ postaci:

$$T(f) = \sup_{0 < x < k^*} \{\ln(k^\alpha - x) + \beta f(x)\}.$$

   Wykaż, że $V$ spełnia równanie Bellmana $T(V) = V$.
4. Wykaż, że rozważany problem ma dokładnie jedno rozwiązanie optymalne.