Ekonomia matematyczna i dynamiczna optymalizacja

Ramy wykładu i podstawowe narzędzia matematyczne

Jakub Growiec

SGH

Semestr letni 2012-13

Układy dynamiczne

Rozwiązanie modelu dynamicznego bardzo często można zapisać rekursywnie, czyli w postaci układu dynamicznego, np.

$$x_{t+1} = f(x_t) \qquad lub \qquad x'(t) = f(x(t)).$$

Układy dynamiczne

Rozwiązanie modelu dynamicznego bardzo często można zapisać rekursywnie, czyli w postaci układu dynamicznego, np.

$$x_{t+1} = f(x_t) \qquad lub \qquad x'(t) = f(x(t)).$$

Zmienność x w czasie zależy od warunków początkowych, $x(0)$. Możliwe, że istnieją warunki początkowe prowadzące do pewnych specyficznych typów ścieżek czasowych $x(t)$:

Układy dynamiczne

Rozwiązanie modelu dynamicznego bardzo często można zapisać rekursywnie, czyli w postaci układu dynamicznego, np.

$$x_{t+1} = f(x_t) \qquad \textit{lub} \qquad x'(t) = f(x(t)).$$

Zmienność x w czasie zależy od warunków początkowych, $x(0)$. Możliwe, że istnieją warunki początkowe prowadzące do pewnych specyficznych typów ścieżek czasowych $x(t)$:

Stan ustalony (steady state) – **funkcja $x(t)$ stała w czasie**: $x_{t+1} = x_t$ lub $x'(t) = 0$ dla każdego t. Fakt: niemal każdy model makroekonomiczny ma stan ustalony.

Układy dynamiczne

Rozwiązanie modelu dynamicznego bardzo często można zapisać rekursywnie, czyli w postaci układu dynamicznego, np.

$$x_{t+1} = f(x_t) \qquad lub \qquad x'(t) = f(x(t)).$$

Zmienność x w czasie zależy od warunków początkowych, $x(0)$. Możliwe, że istnieją warunki początkowe prowadzące do pewnych specyficznych typów ścieżek czasowych $x(t)$:

Stan ustalony (steady state) – **funkcja** $x(t)$ **stała w czasie**: $x_{t+1} = x_t$ lub $x'(t) = 0$ dla każdego t. Fakt: niemal każdy model makroekonomiczny ma stan ustalony.

Cykl deterministyczny – **funkcja** $x(t)$ **okresowa**, np. $x(t) = \sin t$ albo np. $x_t = 1$ dla t nieparzystych, $x_t = 0$ dla t parzystych. *Może* się zdarzyć, że taka ścieżka będzie spełniać równanie układu dynamicznego. Fakt: cykle deterministyczne występują w modelach ekonomicznych bardzo rzadko.

Dynamiczna optymalizacja

- Optymalna decyzja nie jest *liczbą* x lecz ciągiem $\{x_1, ..., x_n\}$, ciągiem nieskończonym $\{x_1, x_2, ...\}$ lub funkcją $f : X \to \mathbb{R}$. Zmienną niezależną jest czas.

Dynamiczna optymalizacja

- Optymalna decyzja nie jest *liczbą* x lecz ciągiem $\{x_1, ..., x_n\}$, ciągiem nieskończonym $\{x_1, x_2, ...\}$ lub funkcją $f : X \to \mathbb{R}$. Zmienną niezależną jest czas.
- Horyzont planowania: **skończony** lub **nieskończony**.

Dynamiczna optymalizacja

- Optymalna decyzja nie jest *liczbą* x lecz ciągiem $\{x_1, ..., x_n\}$, ciągiem nieskończonym $\{x_1, x_2, ...\}$ lub funkcją $f : X \to \mathbb{R}$. Zmienną niezależną jest czas.
- Horyzont planowania: **skończony** lub **nieskończony**.
- Czas **dyskretny** $t = 0, 1, 2, ..., T$ tudzież $t = 0, 1, 2, ...$.
  Czas **ciągły** $t \in [0, T]$ tudzież $t \in [0, +\infty)$.

Dynamiczna optymalizacja

- Optymalna decyzja nie jest *liczbą* x lecz ciągiem $\{x_1, ..., x_n\}$, ciągiem nieskończonym $\{x_1, x_2, ...\}$ lub funkcją $f : X \to \mathbb{R}$. Zmienną niezależną jest czas.
- Horyzont planowania: **skończony** lub **nieskończony**.
- Czas **dyskretny** $t = 0, 1, 2, ..., T$ tudzież $t = 0, 1, 2, ...$.
  Czas **ciągły** $t \in [0, T]$ tudzież $t \in [0, +\infty)$.
- Jeśli przestrzeń, w której zanurzony jest problem optymalizacyjny, jest nieskończenie wymiarowa, wymaga to innych (ogólniejszych) narzędzi matematycznych niż znajdowanie ekstremów funkcji n zmiennych.

Dynamiczna optymalizacja

- Optymalna decyzja nie jest *liczbą* x lecz ciągiem $\{x_1, ..., x_n\}$, ciągiem nieskończonym $\{x_1, x_2, ...\}$ lub funkcją $f : X \to \mathbb{R}$. Zmienną niezależną jest czas.
- Horyzont planowania: **skończony** lub **nieskończony**.
- Czas **dyskretny** $t = 0, 1, 2, ..., T$ tudzież $t = 0, 1, 2, ...$
Czas **ciągły** $t \in [0, T]$ tudzież $t \in [0, +\infty)$.
- Jeśli przestrzeń, w której zanurzony jest problem optymalizacyjny, jest nieskończenie wymiarowa, wymaga to innych (ogólniejszych) narzędzi matematycznych niż znajdowanie ekstremów funkcji n zmiennych.
- Zmienne stanu (*state variables*): zmienne $y(t)$ dla których mamy zadany warunek początkowy, na ogół związane równaniem dynamiki (różniczkowym bądź różnicowym).
- Zmienne sterujące (*control variables*): zmienne $u(t)$ dla których nie mamy warunku początkowego, nie związane równaniem dynamiki. Punkt startowy $u(0)$ dobieramy na ogół tak, by spełnić *warunki transwersalności*.

Zastosowania poznanych narzędzi

- Modele cyklu koniunkturalnego.

Zastosowania poznanych narzędzi

- Modele cyklu koniunkturalnego.
- Modele wzrostu gospodarczego.

Zastosowania poznanych narzędzi

- Modele cyklu koniunkturalnego.
- Modele wzrostu gospodarczego.
- Modele rynku pracy.

Zastosowania poznanych narzędzi

- Modele cyklu koniunkturalnego.
- Modele wzrostu gospodarczego.
- Modele rynku pracy.
- Modele wyceny aktywów.

Zastosowania poznanych narzędzi

- Modele cyklu koniunkturalnego.
- Modele wzrostu gospodarczego.
- Modele rynku pracy.
- Modele wyceny aktywów.
- Modele finansów publicznych.

Wybrane zastosowania dynamicznej optymalizacji

Zastosowania poznanych narzędzi

- Modele cyklu koniunkturalnego.
- Modele wzrostu gospodarczego.
- Modele rynku pracy.
- Modele wyceny aktywów.
- Modele finansów publicznych.
- ... oraz wiele innych.

Jak widać, będziemy się koncentrować przede wszystkim na zastosowaniach dynamicznej optymalizacji w makroekonomii, jednak zastosowania mikroekonomiczne są również liczne.

Narzędzia dynamicznej optymalizacji (1)

- Czas dyskretny, horyzont planowania skończony: zwykłe narzędzia optymalizacji dla funkcji n zmiennych oraz programowanie dynamiczne.
  (a) Warunki konieczne i dostateczne istnienia ekstremum.

Narzędzia dynamicznej optymalizacji (1)

- Czas dyskretny, horyzont planowania skończony: zwykłe narzędzia optymalizacji dla funkcji n zmiennych oraz programowanie dynamiczne.
  (a) Warunki konieczne i dostateczne istnienia ekstremum.
  (b) Problemy optymalizacji z warunkami ograniczającymi $g_i(x_1, ..., x_n) = 0$ dla $i = 1, ..., m$: metoda Lagrange'a.

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, ..., x_n).$$

Narzędzia dynamicznej optymalizacji (1)

- Czas dyskretny, horyzont planowania skończony: zwykłe narzędzia optymalizacji dla funkcji n zmiennych oraz programowanie dynamiczne.
  (a) Warunki konieczne i dostateczne istnienia ekstremum.
  (b) Problemy optymalizacji z warunkami ograniczającymi $g_i(x_1, ..., x_n) = 0$ dla $i = 1, ..., m$: metoda Lagrange'a.

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, ..., x_n).$$

- Czas dyskretny, horyzont planowania nieskończony, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...)$: metoda Lagrange'a oraz programowanie dynamiczne.
  (a) Metoda Lagrange'a.

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g_i(\mathbf{x}).$$

Narzędzia dynamicznej optymalizacji (1)

- Czas dyskretny, horyzont planowania skończony: zwykłe narzędzia optymalizacji dla funkcji n zmiennych oraz programowanie dynamiczne.
  (a) Warunki konieczne i dostateczne istnienia ekstremum.
  (b) Problemy optymalizacji z warunkami ograniczającymi $g_i(x_1, ..., x_n) = 0$ dla $i = 1, ..., m$: metoda Lagrange'a.

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, ..., x_n).$$

- Czas dyskretny, horyzont planowania nieskończony, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...)$: metoda Lagrange'a oraz programowanie dynamiczne.
  (a) Metoda Lagrange'a.

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i g_i(\mathbf{x}).$$

  (b) Programowanie dynamiczne: zasada optymalności Bellmana

$$V(s_t) = \max_{c_t} \{u(c_t, s_t) + \beta V(s_{t+1})\}.$$

Narzędzia dynamicznej optymalizacji (2)

- Czas ciągły, horyzont planowania skończony, $t \in [0, T]$: rachunek wariacyjny lub teoria optymalnego sterowania.
  (a) Poszukiwana jest funkcja $y(t)$, $y : [0, T] \to \mathbb{R}$, maksymalizująca **funkcjonał**

$$\max V[y] = \int_0^T F(y(t), y'(t), t)dt.$$

  (b) Teoria optymalnego sterowania uogólnia ten problem do poszukiwania **dwóch funkcji** $y(t), u(t)$:

$$\max V[u, y] = \int_0^T F(y(t), u(t), t)dt \quad p.w. \quad y'(t) = f(u(t), y(t), t).$$

Narzędzia dynamicznej optymalizacji (2)

- Czas ciągły, horyzont planowania skończony, $t \in [0, T]$: rachunek wariacyjny lub teoria optymalnego sterowania.
  (a) Poszukiwana jest funkcja $y(t)$, $y : [0, T] \to \mathbb{R}$, maksymalizująca **funkcjonał**
  $$\max V[y] = \int_0^T F(y(t), y'(t), t)dt.$$
  (b) Teoria optymalnego sterowania uogólnia ten problem do poszukiwania **dwóch funkcji** $y(t), u(t)$:
  $$\max V[u, y] = \int_0^T F(y(t), u(t), t)dt \quad p.w. \quad y'(t) = f(u(t), y(t), t).$$
- Czas ciągły, horyzont planowania nieskończony, $t \in [0, +\infty)$: rachunek wariacyjny lub teoria optymalnego sterowania.
  Należy zastąpić T przez $+\infty$ w powyższych wzorach.
  (O dodatkowych problemach później.)

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (1)

Przestrzeń funkcyjna: przestrzeń, której elementami są funkcje.

- Przykład: przestrzeń funkcyjna $X = \mathbb{C}^6(\mathbb{R})$ jest przestrzenią wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które są 6-krotnie różniczkowalne w sposób ciągły. Niech $f(x) = e^x, g(x) = |x|$. Wtedy $f \in X, g \notin X$.

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (1)

Przestrzeń funkcyjna: przestrzeń, której elementami są funkcje.

- Przykład: przestrzeń funkcyjna $X = \mathbb{C}^6(\mathbb{R})$ jest przestrzenią wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które są 6-krotnie różniczkowalne w sposób ciągły. Niech $f(x) = e^x, g(x) = |x|$. Wtedy $f \in X, g \notin X$.
- Przykład 2: przestrzeń funkcyjna $X = \mathbb{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ jest przestrzenią wszystkich funkcji ciągłych $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Niech $f(x, y) = x - 3y, g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ (dodatkowo $g(0, 0) = 0$). Wtedy $f \in X, g \notin X$ bo g nie jest ciągła (w zerze).

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (1)

Przestrzeń funkcyjna: przestrzeń, której elementami są funkcje.

- Przykład: przestrzeń funkcyjna $X = \mathbb{C}^6(\mathbb{R})$ jest przestrzenią wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które są 6-krotnie różniczkowalne w sposób ciągły. Niech $f(x) = e^x, g(x) = |x|$. Wtedy $f \in X, g \notin X$.
- Przykład 2: przestrzeń funkcyjna $X = \mathbb{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ jest przestrzenią wszystkich funkcji ciągłych $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Niech $f(x, y) = x - 3y, g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ (dodatkowo $g(0, 0) = 0$). Wtedy $f \in X, g \notin X$ bo g nie jest ciągła (w zerze).

Funkcjonał: funkcja, której argumentem jest inna funkcja.

- Przykład: funkcjonał $V : \mathbb{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$, przy czym $V(x)(t) = e^{x(t)}$ przekształca funkcje $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ różniczkowalne w sposób ciągły w funkcje $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ różniczkowalne w sposób ciągły. Przykładowo, dla $x(t) = \sin t - 7$ mamy $V(x)(t) = e^{\sin t - 7}$.

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (2)

Norma: definiowana jest aksjomatycznie.

- $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $||ax|| = |a| \cdot ||x||$ dla $a \in \mathbb{R}$ (dodatnia jednorodność).
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (nierówność trójkąta).

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (2)

Norma: definiowana jest aksjomatycznie.

- $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $||ax|| = |a| \cdot ||x||$ dla $a \in \mathbb{R}$ (dodatnia jednorodność).
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (nierówność trójkąta).
- Przykład normy w przestrzeni funkcyjnej (dla funkcji $x : X \to R$):

$$||x||_{\text{sup}} = \sup_{t \in X}\{|x(t)|\}.$$

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (2)

Norma: definiowana jest aksjomatycznie.

- $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $||ax|| = |a| \cdot ||x||$ dla $a \in \mathbb{R}$ (dodatnia jednorodność).
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (nierówność trójkąta).
- Przykład normy w przestrzeni funkcyjnej (dla funkcji $x : X \to R$):

$$||x||_{\sup} = \sup_{t \in X} \{|x(t)|\}.$$

- Inny przykład (zakładamy $p \in [1, +\infty)$):

$$||x||_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_X |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (2)

Norma: definiowana jest aksjomatycznie.

- $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $||ax|| = |a| \cdot ||x||$ dla $a \in \mathbb{R}$ (dodatnia jednorodność).
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (nierówność trójkąta).
- Przykład normy w przestrzeni funkcyjnej (dla funkcji $x : X \to R$):

$$||x||_{\sup} = \sup_{t \in X}\{|x(t)|\}.$$

- Inny przykład (zakładamy $p \in [1, +\infty)$):

$$||x||_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_X |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Norma operatora (tj. funkcjonału): norma określona w przestrzeni funkcjonałów $V : X \to Y$.

- $$||V|| = \sup\{||V(x)|| : ||x|| \in X, ||x|| \leq 1\}.$$

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (3)

Operator zwężający (kontrakcja) $V : X \to Y$.

- Wymagamy, by V spełniał warunek:

$$||V(x_1) - V(x_2)|| \leq \alpha||x_1 - x_2||$$

dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ i pewnego $\alpha \in (0, 1)$.

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (3)

Operator zwężający (kontrakcja) $V : X \to Y$.

- Wymagamy, by V spełniał warunek:

$$||V(x_1) - V(x_2)|| \leq \alpha ||x_1 - x_2||$$

  dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ i pewnego $\alpha \in (0, 1)$.

- Przykład: $V(x) = \frac{3}{4}x$ jest kontrakcją. $V(x) = x^3$ nie jest kontrakcją, bo np. dla $x(t) = -y(t) = \sin t$ i normą sup mamy $||x|| = ||y|| = 1$ oraz $||x - y|| = 2$, natomiast
  $||V(x) - V(y)|| = ||\sin^3(t) + \sin^3(t)|| = 2 = ||x - y||$.
  Kontrprzykładów jest tu mnóstwo (nieskończenie wiele).

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (3)

Operator zwężający (kontrakcja) $V : X \to Y$.

- Wymagamy, by V spełniał warunek:

$$||V(x_1) - V(x_2)|| \leq \alpha ||x_1 - x_2||$$

dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ i pewnego $\alpha \in (0,1)$.

- Przykład: $V(x) = \frac{3}{4}x$ jest kontrakcją. $V(x) = x^3$ nie jest kontrakcją, bo np. dla $x(t) = -y(t) = \sin t$ i normą sup mamy $||x|| = ||y|| = 1$ oraz $||x - y|| = 2$, natomiast $||V(x) - V(y)|| = ||\sin^3(t) + \sin^3(t)|| = 2 = ||x - y||$. Kontrprzykładów jest tu mnóstwo (nieskończenie wiele).

Przestrzeń Banacha X: przestrzeń unormowana (ze zdefiniowaną normą), w której wszystkie ciągi Cauchy'ego są zbieżne (do granicy w X).

- Przykłady: $\mathbb{R}, [0,1]$ z modułem liczby jako normą; $\mathbb{C}(\mathbb{R}), \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ z normą sup.

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (3)

Operator zwężający (kontrakcja) $V : X \to Y$.

- Wymagamy, by V spełniał warunek:

$$||V(x_1) - V(x_2)|| \leq \alpha ||x_1 - x_2||$$

dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ i pewnego $\alpha \in (0,1)$.

- Przykład: $V(x) = \frac{3}{4}x$ jest kontrakcją. $V(x) = x^3$ nie jest kontrakcją, bo np. dla $x(t) = -y(t) = \sin t$ i normą sup mamy $||x|| = ||y|| = 1$ oraz $||x - y|| = 2$, natomiast
$||V(x) - V(y)|| = ||\sin^3(t) + \sin^3(t)|| = 2 = ||x - y||$.
Kontrprzykładów jest tu mnóstwo (nieskończenie wiele).

Przestrzeń Banacha X: przestrzeń unormowana (ze zdefiniowaną normą), w której wszystkie ciągi Cauchy'ego są zbieżne (do granicy w X).

- Przykłady: $\mathbb{R}, [0,1]$ z modułem liczby jako normą; $\mathbb{C}(\mathbb{R}), \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ z normą sup.
- Przykład: przestrzeń $X = (0,1)$ nie jest przestrzenią Banacha, bo istnieje ciąg Cauchy'ego $\{\frac{1}{n}\} \subset X$, zbieżny do $0 \notin X$.

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (4)

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym:

- **Każdy operator zwężający $V : X \to X$ określony na przestrzeni Banacha X ma dokładnie jeden punkt stały $x^* \in X$.**

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (4)

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym:

- **Każdy operator zwężający $V : X \to X$ określony na przestrzeni Banacha X ma dokładnie jeden punkt stały $x^* \in X$.**
- Przykład: $f(x) = 0,3x + 7$ jest kontrakcją, $[0, +\infty)$ jest przestrzenią Banacha. Łatwo sprawdzić, że punkt stały $x^* \in [0, +\infty)$ spełniający $x^* = f(x^*)$ jest dokładnie jeden, a mianowicie $x^* = 10$.

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (4)

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym:

- **Każdy operator zwężający $V : X \to X$ określony na przestrzeni Banacha X ma dokładnie jeden punkt stały $x^* \in X$.**
- Przykład: $f(x) = 0,3x + 7$ jest kontrakcją, $[0, +\infty)$ jest przestrzenią Banacha. Łatwo sprawdzić, że punkt stały $x^* \in [0, +\infty)$ spełniający $x^* = f(x^*)$ jest dokładnie jeden, a mianowicie $x^* = 10$.
- Przykład 2: niech $V : \mathbb{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ będzie kontrakcją. Wtedy istnieje dokładnie jedna taka funkcja $x^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że $x^*(t) = V(x^*)(t)$.

Podstawowe pojęcia z analizy funkcjonalnej (4)

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym:

- **Każdy operator zwężający $V : X \to X$ określony na przestrzeni Banacha X ma dokładnie jeden punkt stały $x^* \in X$.**
- Przykład: $f(x) = 0,3x + 7$ jest kontrakcją, $[0, +\infty)$ jest przestrzenią Banacha. Łatwo sprawdzić, że punkt stały $x^* \in [0, +\infty)$ spełniający $x^* = f(x^*)$ jest dokładnie jeden, a mianowicie $x^* = 10$.
- Przykład 2: niech $V : \mathbb{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ będzie kontrakcją. Wtedy istnieje dokładnie jedna taka funkcja $x^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że $x^*(t) = V(x^*)(t)$.
- Metoda kolejnych przybliżeń: $x^*(t)$ można znaleźć iterując operator zwężający V, startując z dowolnego punktu startowego (tj. funkcji startowej) $x_0(t)$ w X. Bierzemy kolejno $x_0, V(x_0), V(V(x_0))$, itd. Mamy:

$$\lim_{n\to\infty} V^n(x_0) = x^*.$$

  Metoda kolejnych przybliżeń pozwala też oszacować błąd aproksymacji x^* przez $V^n(x_0)$ dla dowolnego skończonego n.

Do czego to potrzebne?

Zastosowania w dynamicznej optymalizacji:

- Funkcjonały i przestrzenie funkcyjne: wszędzie, gdzie pojawia się nieskończony horyzont planowania.

Do czego to potrzebne?

Zastosowania w dynamicznej optymalizacji:

- Funkcjonały i przestrzenie funkcyjne: wszędzie, gdzie pojawia się nieskończony horyzont planowania.
- Normy operatorów (funkcjonałów): wszędzie, gdzie pojawia się nieskończony horyzont planowania i gdzie zapisujemy rozwiązania w postaci rekursywnej.

Zastosowania w dynamicznej optymalizacji:

- Funkcjonały i przestrzenie funkcyjne: wszędzie, gdzie pojawia się nieskończony horyzont planowania.
- Normy operatorów (funkcjonałów): wszędzie, gdzie pojawia się nieskończony horyzont planowania i gdzie zapisujemy rozwiązania w postaci rekursywnej.
- Układy dynamiczne: analiza dynamiki modeli oraz wszędzie, gdzie zapisujemy równania w postaci rekursywnej.

Do czego to potrzebne?

Zastosowania w dynamicznej optymalizacji:

- Funkcjonały i przestrzenie funkcyjne: wszędzie, gdzie pojawia się nieskończony horyzont planowania.
- Normy operatorów (funkcjonałów): wszędzie, gdzie pojawia się nieskończony horyzont planowania i gdzie zapisujemy rozwiązania w postaci rekursywnej.
- Układy dynamiczne: analiza dynamiki modeli oraz wszędzie, gdzie zapisujemy równania w postaci rekursywnej.
- Przestrzeń Banacha: zawsze warto wiedzieć, w jakiej przestrzeni się znajdujemy... :)

Do czego to potrzebne?

Zastosowania w dynamicznej optymalizacji:

- Funkcjonały i przestrzenie funkcyjne: wszędzie, gdzie pojawia się nieskończony horyzont planowania.
- Normy operatorów (funkcjonałów): wszędzie, gdzie pojawia się nieskończony horyzont planowania i gdzie zapisujemy rozwiązania w postaci rekursywnej.
- Układy dynamiczne: analiza dynamiki modeli oraz wszędzie, gdzie zapisujemy równania w postaci rekursywnej.
- Przestrzeń Banacha: zawsze warto wiedzieć, w jakiej przestrzeni się znajdujemy... :)
- Kontrakcje i twierdzenie Banacha: programowanie dynamiczne (zasada Bellmana).