Ekonomia Matematyczna i Dynamiczna Optymalizacja

Wykład: dr Jakub Growiec, SGH

22 kwietnia 2013

[Optymalizacja statyczna z warunkami ograniczającymi.] Rozważmy następujący statyczny model równowagi ogólnej, podobny do modelu konkurencji monopolistycznej Dixita–Stiglitza (1977).

Gospodarstwa domowe maksymalizują tu użyteczność z konsumpcji *continuum* niedoskonale substytucyjnych dóbr konsumpcyjnych $\{c_i\}_{i\in[0,1]}$. Ich funkcja użyteczności przyjmuje postać $u(\{c_i\}_{i\in[0,1]}) = \int_0^1 c_i^\theta di$, gdzie parametr $\theta \in (0,1)$ mierzy stopień substytucyjności dóbr. Gospodarstwa domowe związane są ograniczeniem budżetowym $\int_0^1 q_i c_i di = M$, gdzie $M > 0$ oznacza całkowity majątek gospodarstwa domowego. Równocześnie gospodarstwo domowe dostarcza na rynku $\int_0^1 L_i di = L > 0$ jednostek pracy (podaż pracy jest nieelastyczna). Przyjmujemy, że M i L są ustalonymi parametrami.

Każde dobro konsumpcyjne indeksowane $i \in [0,1]$ wytwarzane jest natomiast przez odrębnego monopolistę, który wyznacza jego cenę q_i tak, by zmaksymalizować swój zysk $\pi_i = q_i c_i - wL_i$, biorąc jako dane: funkcję popytu gospodarstwa domowego $c_i(q_i)$, produkcję i ceny pozostałych monopolistów (c_j, q_j gdzie $j \neq i$) oraz rynkową stawkę płacy w. W procesie produkcyjnym wykorzystywana jest wyłącznie praca, a funkcja produkcji przyjmuje postać liniową $c_i = \alpha L_i$, gdzie $\alpha > 0$ jest ustalonym parametrem.

1. (3 pkt.) Zapisz funkcję Lagrange'a $\mathcal{L}(\{c_i\}_{i\in[0,1]})$ dla problemu gospodarstwa domowego. Znajdź krzywą popytu $c_i(q_i)$. (Wskazówka: c_i będzie zależeć także od q_j, c_j, gdzie $j \neq i$.)

2. (3 pkt.) Wykaż, że maksymalizacja zysku i-tego monopolisty ($i \in [0,1]$) implikuje narzucenie stałej marży nad kosztem krańcowym: $q_i = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{w}{\alpha}$.

3. (4 pkt.) Zauważając symetrię rozwiązań dla producentów poszczególnych dóbr pośrednich ($q_i = q_j = \bar{q}$, $c_i = c_j = \bar{c}$, $L_i = L_j = L$ dla każdego i, j) oraz następujące tożsamości dla wielkości zagregowanych:

$$\int_0^1 c_i di = \int_0^1 \bar{c} di = \bar{c}, \qquad \int_0^1 \pi_i di = \int_0^1 \bar{\pi} di = \bar{\pi}, \qquad \int_0^1 L_i di = L,$$

   oblicz $\bar{c}, \bar{q}, w, \bar{\pi}$ jako funkcje wyłącznie egzogenicznych parametrów modelu: α, θ, M, L. Wykaż, że $M = wL + \int_0^1 \pi_i di$ (cały majątek zostaje rozdzielony między wynagrodzenie pracy oraz zyski monopolistów).

Rozwiązanie. Funkcja Lagrange'a dla problemu gospodarstwa domowego wygląda następująco:

$$\mathcal{L}(\{c_i\}_{i\in[0,1]}) = \int_0^1 c_i^\theta di + \lambda \left(M - \int_0^1 q_i c_i di \right).$$

Zróżniczkujmy ją względem c_i oraz c_j dla dowolnych $i, j \in [0,1]$, przy czym niech $i \neq j$. Mamy:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_i} &= \theta c_i^{\theta-1} - \lambda q_i = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_j} &= \theta c_j^{\theta-1} - \lambda q_j = 0\end{aligned}$$

Zauważmy, że oba powyższe równania zawierają tę samą zmienną dualną λ. Obliczając λ z jednego (dowolnego) z powyższych równań i wstawiając ją do drugiego otrzymujemy zatem następującą izoelastyczną (tj. zadaną funkcją potęgową) krzywą popytu na dobro konsumpcyjne c_i, w zależności od jego ceny q_i:

$$\left(\frac{c_i}{c_j}\right)^{\theta-1} = \frac{q_i}{q_j} \qquad \Rightarrow \qquad c_i(q_i) = c_j \left(\frac{q_j}{q_i}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

Zapiszmy teraz problem i-tego monopolisty, produkującego i-te dobro konsumpcyjne. Ustala on cenę q_i tak, by zmaksymalizować swój zysk, równy:

$$\pi_i(q_i) = q_i c_i - wL_i = q_i c_i - \frac{w}{\alpha} c_i = c_i(q_i)\left(q_i - \frac{w}{\alpha}\right).$$

W powyższym zapisie uwzględniono już funkcję produkcji $c_i = \alpha L_i$ oraz fakt, iż monopolista uwzględnia w swoim problemie optymalizacyjnym krzywą popytu $c_i(q_i)$ obliczoną w punkcie powyższym. Podkreślmy też, że występujące we wzorze na krzywą popytu wielkości c_j, q_j, gdzie $j \neq i$, brane są przez i-tego monopolistę jako dane, ustalone liczby.

Maksymalizacja zysku względem ceny monopolistycznej q_i implikuje:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_i) = c_i'(q_i)\left(q_i - \frac{w}{\alpha}\right) + c_i(q_i) = 0.$$

Ponieważ ze wzoru na krzywą popytu mamy

$$c_i'(q_i) = -\frac{1}{1-\theta} c_j \left(\frac{q_j}{q_i}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \frac{1}{q_i} = -\frac{1}{1-\theta}\frac{c_i(q_i)}{q_i},$$

zatem

$$-\frac{1}{1-\theta}\frac{c_i(q_i)}{q_i}\left(q_i - \frac{w}{\alpha}\right) + c_i(q_i) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_i(q_i)\left(1 - \frac{1}{1-\theta}\left(1 - \frac{w}{\alpha q_i}\right)\right) = 0.$$

Z założenia zachodzi $c_i(q_i) > 0$, toteż w kolejnym kroku otrzymujemy już pożądany wynik, implikujący narzucenie przez monopolistę stałej proporcjonalnej marży $1/\theta > 1$ nad kosztem krańcowym w/α:

$$1 - \theta = 1 - \frac{w}{\alpha q_i} \qquad \Rightarrow \qquad q_i = \frac{w}{\alpha\theta}.$$

Możemy teraz przejść do ostatniego podpunktu zadania. Jak łatwo zauważyć, prawa strona powyższego wzoru na cenę monopolistyczną q_i nie zależy od i. Oznacza to, że zachodzi symetria: dla każdego $i, j \in [0,1]$, $q_i = q_j = \bar{q} = \frac{w}{\alpha\theta}$. Wstawiając tę równość do krzywej popytu $c_i(q_i)$, otrzymujemy następnie równość $c_i = c_j = \bar{c}$ dla każdego $i, j \in [0, 1]$. Wstawiając to do funkcji produkcji: $c_i = \alpha L_i$, otrzymujemy też $L_i = L_j = L$ dla każdego $i, j \in [0, 1]$. To z kolei pozwala wyprowadzić zagregowaną funkcję produkcji w omawianej gospodarce: $\bar{c} = \alpha L$.

Teraz możemy skorzystać z ograniczenia budżetowego gospodarstwa domowego:

$$\int_0^1 q_i c_i di = \int_0^1 \bar{q}\bar{c} di = \bar{q}\bar{c} = M \qquad \Rightarrow \qquad \bar{c} = \frac{\alpha\theta M}{w}.$$

Pozostaje obliczenie równowagowej stawki płacy w i wyrugowanie w ze wzorów na $\bar{q}$ i $\bar{c}$. Stawkę płacy w możemy obliczyć zestawiając powyższą równość, reprezentującą (po podstawieniu zagregowanej funkcji produkcji $\bar{c} = \alpha L$) krzywą popytu na pracę, z podażą pracy – przy czym podaż pracy jest tu całkowicie nieelastyczna i wynosi po prostu L. Mamy zatem $w = \frac{\theta M}{L}$.

Wynik powyższy oznacza, że całkowita produkcja w gospodarce $\bar{c} = \alpha L$ jest zdeterminowana wyłącznie przez technologię produkcji i podaż pracy, nie zależy natomiast od siły monopolistycznej poszczególnych firm (wyrażającej się wysokością marży $1/\theta$) ani od majątku gospodarstwa domowego M. Majątek M wpływa już na wycenę dóbr konsumpcyjnych: $\bar{q} = \frac{w}{\alpha\theta} = \frac{M}{\alpha L}$. Parametr θ oddziałuje natomiast wyłącznie na równowagową wysokość płac w oraz zysków monopolistów π_i.

Wysokość zysków monopolistów obliczamy następująco. Po pierwsze, skoro $q_i = \bar{q}$ a $c_i = \bar{c}$ dla każdego $i \in [0, 1]$, mamy $\pi_i = \bar{c}\left(\bar{q} - \frac{w}{\alpha}\right) = \bar{\pi}$, a więc zyski poszczególnych monopolistów są również identyczne. Ich wysokość wynosi:

$$\bar{\pi} = \bar{c}\left(\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)\frac{w}{\alpha}\right) = \frac{1-\theta}{\theta}\frac{\alpha\theta M}{w}\frac{w}{\alpha} = (1-\theta)M.$$

Korzystając z tożsamości $\int_0^1 \bar{\pi} di = \bar{\pi}$, możemy też wyprowadzić równanie podziału majątku:

$$\int_0^1 \bar{\pi} di + wL = \bar{\pi} + wL = (1-\theta)M + \frac{\theta M}{L}L = (1-\theta)M + \theta M = M,$$

a więc istotnie cały majątek gospodarstwa domowego dzielony jest pomiędzy wynagrodzenie pracy oraz zyski monopolistów, w proporcji $\frac{\theta}{1-\theta}$.