

Makroekonomia Zaawansowana

Ćwiczenia 10 – Polityka optymalna

Andrzej Torój

Instytut Ekonometrii – Zakład Ekonometrii Stosowanej

Plan ćwiczeń

- 1 Optymalna polityka pieniężna
- 2 Funkcja straty a dobrobyt społeczny
- 3 Domknięcie modelu NK z optymalną polityką pieniężną
- 4 Optymalna polityka pieniężna w Dynare
- 5 Zadania

Plan prezentacji

- 1 Optymalna polityka pieniężna
- 2 Funkcja straty a dobrobyt społeczny
- 3 Domknięcie modelu NK z optymalną polityką pieniężną
- 4 Optymalna polityka pieniężna w Dynare
- 5 Zadania

Reguła Taylora

Dotychczas korzystaliśmy z następującego równania nominalnej stopy procentowej:

$$i_t = \rho + (1 - \gamma_\rho)(\gamma_\pi \pi_t + \gamma_y y_t) + \gamma_\rho i_{t-1} + \varepsilon_t^i \quad (1)$$

- konstrukcja *ad hoc* – brakuje wyprowadzenia od mikropodstaw
- popularne, choć wbrew idei DSGE
- dlatego bankowi centralnemu też na ogół powierza się zadanie optymalizacyjne
- co bank centralny może optymalizować?

Polityka optymalna

- Zadanie banku centralnego: minimalizować zmienność w gospodarce.
 - W gospodarce są sztywności nominalne, a więc zmienność cen wymaga dostosowań. W ich czasie nie wszyscy producenci mają ceny ustalone na poziomie optymalnym, co zmniejsza zagregowaną produkcję, konsumpcję i w końcu dobrobyt.
- Odpowiada temu często stosowana funkcja straty *ad hoc*:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k E_t (\pi_{t+k}^2 + \lambda y_{t+k}^2)$$

Przy pewnych warunkach można pokazać, że taka funkcja straty jest tożsama z maksymalizacją dobrobytu społecznego przez bank centralny.

Aby tak było, musi zachodzić (przy pewnych dodatkowych warunkach – zob. dalej):

$$\lambda = \mu^{-1} \frac{(1 - \omega)(1 - \theta)(1 - \beta\theta)}{\theta + \omega[1 - \theta(1 - \beta)]}$$

Plan prezentacji

- 1 Optymalna polityka pieniężna
- 2 Funkcja straty a dobrobyt społeczny
- 3 Domknięcie modelu NK z optymalną polityką pieniężną
- 4 Optymalna polityka pieniężna w Dynare
- 5 Zadania

Przybliżenia 2. rzędu (2)

- Porządkując, otrzymujemy: $x_t = \left(\frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}} \right)^2$. Po rozwiązaniu równania kwadratowego ze względu na $\left(\frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}} \right)$ otrzymujemy:

$\frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}} = 1 \pm \sqrt{1 - 2x_t}$. Zauważmy, że w stanie ustalonym $x_t = 0$ i lewa strona równania = 0, a więc tylko rozwiązanie $\frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}} = 1 - \sqrt{1 - 2x_t}$ ma sens ekonomiczny.

- Rozwinięcie prawej strony w szereg Taylora 2. rzędu wokół $x_t = 0$ daje:

$$\frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}} = x_t + \frac{1}{2}x_t^2 \quad (3)$$

- Na podstawie (2) oraz (3) możemy zatem zapisać:

$$f(X) \simeq f(\bar{x}) + \bar{x}f'(\bar{x}) \left(x_t + \frac{1}{2}x_t^2 \right) + \bar{x}^2 \frac{f''(\bar{x})}{2} \left(x_t + \frac{1}{2}x_t^2 \right)^2 \quad (4)$$

Przybliżenia 2. rzędu (3)

Pomijamy wyrażenia do potęgi 3. lub wyższych, otrzymując ostatecznie:

$$f(\mathbf{X}) \simeq f(\bar{\mathbf{X}}) + \bar{\mathbf{X}} f'(\bar{\mathbf{X}}) \left(x_t + \frac{1}{2} x_t^2 \right) + \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{X}}^2 f''(\bar{\mathbf{X}})] x_t^2 \quad (5)$$

Gdy $\mathbf{X}$ jest wektorem zmiennych, f_{X_i} pochodną względem zmiennej X_i obliczoną dla stanu ustalonego, a $f_{X_i X_j}$ drugą pochodną względem zmiennych X_i oraz X_j , wówczas:

$$f(\mathbf{X}) \simeq f(\bar{\mathbf{X}}) + \sum_i \bar{X}_i f_{X_i} \left(x_{i,t} + \frac{1}{2} x_{i,t}^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \bar{X}_i \bar{X}_j f_{X_i X_j} x_{i,t} x_{j,t} \quad (6)$$

Przybliżenia 2. rzędu (4)

Z punktu widzenia polityki pieniężnej, istotne jest rozróżnienie pomiędzy zmiennymi, na które polityka ma wpływ, i takimi, na które nie ma wpływu (wstrząsy). Niech zatem $\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_t \\ \epsilon_t \end{bmatrix}$ wg tego podziału. Równanie (6) przybiera wówczas postać:

$$f(\mathbf{Z}, \epsilon) \simeq f(\bar{\mathbf{Z}}, \bar{\epsilon}) + \sum_i \bar{Z}_i f_{Z_i} (z_{i,t} + \frac{1}{2} z_{i,t}^2) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,i \neq j} \bar{Z}_{ij}^2 f_{Z_i Z_j} z_{i,t}^2 z_{j,t}^2 + \sum_{i,j,i \neq j} \bar{Z}_i \bar{Z}_j f_{Z_i Z_j} z_{i,t} z_{j,t} + \sum_{i,j} \bar{Z}_i \bar{\epsilon}_j f_{Z_i \epsilon_j} z_{i,t} \epsilon_{j,t} + \text{tip}(\epsilon_t) \quad (7)$$

- pominęliśmy wyrażenia zależne tylko od poziomu i od kwadratu ϵ_t , zapisując je jako *tip*(ϵ_t) (ang. *terms independent of policy*), poza kontrolą polityki pieniężnej, a więc bez znaczenia dla dalszej analizy
- $\bar{\epsilon}$ to na ogół wektor jedynek (i byłby nim w dotychczasowym modelu)
- przy pochodnych mieszanych pominęliśmy $\frac{1}{2}$, co wynika z faktu, że elementy ostatniej sumy w (7), dla których $i \neq j$, się dublowały (symetryczne drugie pochodne)

Liniowo-kwadratowe przybliżenie użyteczności (1)

Takie przybliżenie dla jednookresowej funkcji użyteczności:

$$U_t(C_t, N_t) = \varepsilon_t^D \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \quad (8)$$

daje następujące wyrażenie:

$$\begin{aligned} U_t &\simeq \bar{U} + \bar{C}\bar{C}^{-\sigma}c_t - \bar{N}\bar{N}^\phi n_t + \frac{1}{2} [\bar{C}\bar{C}^{-\sigma} + \bar{C}^2(-\sigma\bar{C}^{-\sigma-1})] c_t^2 + \\ &\quad - \frac{1}{2} [\bar{N}\bar{N}^\phi + \bar{N}^2(\phi\bar{N}^{\phi-1})] n_t^2 + 1 \cdot \bar{C}\bar{C}^{-\sigma}c_t\epsilon_t^d + tip = \\ &= \bar{U} + \bar{C}^{1-\sigma}c_t - \bar{N}^{1+\phi}n_t + \frac{1}{2}\bar{C}^{1-\sigma}(1-\sigma)c_t^2 + \\ &\quad - \frac{1}{2}\bar{N}^{1+\phi}(1+\phi)n_t^2 + \bar{C}^{1-\sigma}c_t\epsilon_t^d + tip \end{aligned}$$

Liniowo-kwadratowe przybliżenie użyteczności (2)

Pamiętamy, że w modelu rozważanym w części 5 zachodziło $\bar{Y} = \bar{C}$ (warunek równowagi w gospodarce zamkniętej) oraz że w stanie ustalonym krańcowy $MPN = -\frac{\frac{\partial U}{\partial N}}{\frac{\partial U}{\partial C}}$, czyli $\frac{\bar{Y}}{\bar{N}} = \frac{\bar{N}^\phi}{\bar{C}^{1-\sigma}}$. Stąd mamy $\bar{N}^{1+\phi} = \bar{C}^{1-\sigma}$, $y_t = c_t$ i dalsze uproszczenie do postaci:

$$\frac{U_t - \bar{U}}{\bar{C}^{1-\sigma}} \simeq y_t - n_t + \frac{1}{2} (1 - \sigma) y_t^2 - \frac{1}{2} (1 + \phi) n_t^2 + y_t \epsilon_t^d + tip \quad (9)$$

Liniowo-kwadratowe przybliżenie użyteczności (3)

Wracamy do upraszczającego założenia o log-linearyzowanym modelu, przyjętego przy agregacji funkcji produkcji w temacie 5. Jeżeli rozważamy przybliżenie liniowo-kwadratowe, to nie możemy już tego założenia przyjąć, a zatem

$$N_t = \int_0^1 N_{n,t} dn = \int_0^1 \frac{Y_{n,t}}{\epsilon_t^S} dn = \frac{Y_t}{\epsilon_t^S} \int_0^1 \left(\frac{P_{n,t}}{P_t} \right)^{-\mu} dn$$

gdzie ostatnia równość bazuje na funkcji popytu na dobro n wyprowadzonej w części 5. Przybliżenie drugiego rzędu (a nie log-linearyzacja) wymaga zatem rozważenia równania:

$$n_t = y_t - \epsilon_t^S + \ln \int_0^1 \left(\frac{P_{n,t}}{P_t} \right)^{-\mu} dn \quad (10)$$

Liniowo-kwadratowe przybliżenie użyteczności (4)

Wprowadźmy oznaczenie ceny relatywnej $B_{n,t} = \frac{P_{n,t}}{P_t}$, równej 1 w stanie ustalonym. Zauważmy, że $B_{n,t}^{-\mu} = \exp(-\mu b_{n,t})$, co po rozwinięciu w szereg Taylora 2. rzędu daje:

$$B_{n,t}^{-\mu} = 1 - \mu b_{n,t} + \frac{1}{2}\mu^2 b_{n,t}^2 \quad (11)$$

Liczymy całkę zawartą w (10):

$$\ln \int_0^1 (B_{n,t})^{-\mu} dn = -\mu \int_0^1 b_{n,t} dn + \frac{1}{2}\mu^2 \int_0^1 b_{n,t}^2 dn \quad (12)$$

Liniowo-kwadratowe przybliżenie użyteczności (5)

Zauważmy teraz, że $P_t \equiv \left(\int_0^1 P_{i,t}^{1-\mu} dn \right)^{\frac{1}{1-\mu}}$ (z definicji z tematu 5). Dzielenie obu stron tego równania przez P_t i późniejsze potęgowanie przez $1 - \mu$ daje $1 = \int_0^1 B_{i,t}^{1-\mu} dn$. Przybliżenie logarytmiczne 2. rzędu podobne do (11) daje:

$$1 = 1 + (1 - \mu) \int_0^1 b_{i,t} dn + \frac{1}{2} (1 - \mu)^2 \int_0^1 b_{i,t}^2 dn$$

Na tej podstawie równanie (12) możemy uprościć do postaci:

$$\ln \int_0^1 (B_{n,t})^{-\mu} dn = \mu \frac{1}{2} (1 - \mu) \int_0^1 b_{n,t}^2 dn + \frac{1}{2} \mu^2 \int_0^1 b_{n,t}^2 dn = \frac{1}{2} \mu \int_0^1 b_{n,t}^2 dn \quad (13)$$

Liniowo-kwadratowe przybliżenie użyteczności (6)

Równanie (13) możemy dodatkowo zmodyfikować korzystając z:

$$\int_0^1 b_{n,t}^2 dn = \int_0^1 (p_{n,t} - p_t)^2 dn \approx \int_0^1 [p_{n,t} - E(p_{n,t})]^2 dn = \text{var}_n p_{n,t} \quad (14)$$

gdzie var_n oznacza wariancję między cenami poszczególnych producentów, policzoną w danym okresie. Powyższe przybliżenie polega na tym, że podstawienie $p_t \approx E(p_{n,t})$ wykonywane jest pod znakiem kwadratu, a więc pomijamy tu elementy rzędów dalszych niż drugi. Ostatecznie mamy równanie (10) z uwzględnieniem podstawienia $B_{n,t} = \frac{p_{n,t}}{P_t}$ oraz równań (13) i (14) w postaci:

$$n_t = y_t - \epsilon_t^s + \frac{1}{2} \mu \text{var}_n p_{n,t} \quad (15)$$

Liniowo-kwadratowe przybliżenie użyteczności (7)

Po podstawieniu do (9) mamy:

$$\frac{U_t - \bar{U}}{\bar{C}^{1-\sigma}} \simeq -\frac{1}{2} \mu \text{var}_n p_{n,t} + \frac{1}{2} (1 - \sigma) y_t^2 - \frac{1}{2} (1 + \phi) (y_t - \epsilon_t^s)^2 + y_t \epsilon_t^d + \text{tip} \quad (16)$$

Pominięcie wariancji $p_{n,t}$ w drugim przypadku wynikało z włączenia jej do grupy wyrazów rzędu wyższego niż 2. Równanie można dalej uprościć do postaci:

$$\frac{U_t - \bar{U}}{\bar{C}^{1-\sigma}} \simeq -\frac{1}{2} \mu \text{var}_n p_{n,t} - \frac{1}{2} (\sigma + \phi) y_t^2 + (1 + \phi) y_t \epsilon_t^s + y_t \epsilon_t^d + \text{tip} \quad (17)$$

Zdefiniujmy funkcję dobrobytu (z dokładnością do tip oraz wyrazów wyższych rzędów) w sposób analogiczny do wielookresowej optymalizacji gospodarstw domowych:

$$W = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{U_t - \bar{U}}{\bar{C}^{1-\sigma}} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[-\frac{1}{2} \mu \text{var}_n p_{n,t} - \frac{1}{2} (\sigma + \phi) y_t^2 + (1 + \phi) y_t \epsilon_t^s + y_t \epsilon_t^d \right] \quad (18)$$

Wariancja cen relatywnych (1)

Zauważmy, że wariancja zmiennej przesuniętej o stałą nie ulega zmianie, a zatem:

$$\text{var}_n p_{n,t} = \text{var}_n (p_{n,t} - p_{t-1}) = E_n (p_{n,t} - p_{t-1})^2 - \left[E_n (p_{n,t} - p_{t-1}) \right]^2 = E_n (p_{n,t} - p_{t-1})^2 - \pi_t^2$$

Zauważmy, że pierwszy komponent (wartość oczekiwana liczona po n) możemy rozdzielić na trzy grupy producentów: tych, którzy byli dobrani losowo i nie zmienili ceny (θ) przenosząc tym samym w przyszłość rozkład cen z poprzedniego okresu; tych, którzy cenę zmienili indeksując do przeszłej inflacji ($\omega(1 - \theta)$); wreszcie tych, którzy zmienili cenę na nową cenę optymalną ($(1 - \omega)(1 - \theta)$):

$$\begin{aligned} \text{var}_n p_{n,t} = & \theta E_n (p_{n,t-1} - p_{t-1})^2 + (1 - \theta) \omega (\tilde{p}_{t-1} + \pi_{t-1} - p_{t-1})^2 + \\ & + (1 - \theta) (1 - \omega) (p_{f,t} - p_{t-1})^2 - \pi_t^2 \end{aligned}$$

$\tilde{p}_t$ i $p_{f,t}$ są stałe dla wszystkich producentów z grupy zmieniającej ceny, a więc mogliśmy pominąć operatory wartości oczekiwanej.

Wariancja cen relatywnych (2)

Pamiętamy o równaniu $\pi_t = (1 - \theta)(\tilde{p}_t - p_{t-1})$ oraz $E_t p_{f,t+1} - p_t = \frac{1}{(1-\theta)(1-\omega)} (E_t \pi_{t+1} - \omega \pi_t)$ z tematu 5. Oba przesuwamy o 1 okres wstecz i podstawiamy, zauważając dodatkowo, że $\pi_{t-1} - p_{t-1} = -p_{t-2}$:

$$var_n p_{n,t} = \theta E_n (p_{n,t-1} - p_{t-1})^2 + \frac{\omega}{1-\theta} \pi_{t-1}^2 + \frac{1}{(1-\theta)(1-\omega)} (\pi_t - \omega \pi_{t-1})^2 - \pi_t^2$$

Porządkując i zauważając, że w równaniu jest definicja wariancji cen między producentami w okresie $t-1$, otrzymujemy:

$$var_n p_{n,t} = \theta var_n p_{n,t-1} + \frac{\theta}{1-\theta} \pi_t^2 + \frac{\omega}{(1-\theta)(1-\omega)} (\pi_t - \pi_{t-1})^2$$

Rozwiążmy równanie iteracyjnie w przyszłość, poczynszyszy od okresu 0 (który zaliczymy do warunków początkowych, a więc *tip*) aż do t :

$$var_n p_{n,t} = \theta^{t+1} var_n p_{n,-1} + \sum_{s=0}^t \theta^{t-s} \left(\frac{\theta}{1-\theta} \pi_s^2 + \frac{\omega}{(1-\theta)(1-\omega)} (\pi_s - \pi_{s-1})^2 \right)$$

Wariancja cen relatywnych (3)

Wyznaczmy na potrzeby podstawienia we wzorze (18):

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \text{var}_n p_{n,t} = \\
 = & \frac{\theta}{1-\theta} \left[\pi_0^2 + \beta \left(\theta \pi_0^2 + \pi_1^2 \right) + \beta^2 \left(\theta^2 \pi_0^2 + \theta \pi_1^2 + \pi_2^2 \right) + \dots \right] + \\
 & + \frac{\omega(1-\omega)-1}{(1-\theta)} \left\{ \begin{aligned} & (\pi_0 - \pi_{-1})^2 + \beta \left[\theta (\pi_0 - \pi_{-1})^2 + (\pi_1 - \pi_0)^2 \right] + \\ & + \beta^2 \left[\theta^2 (\pi_0 - \pi_{-1})^2 + \theta (\pi_1 - \pi_0)^2 + (\pi_2 - \pi_1)^2 \right] + \dots \end{aligned} \right\} = \\
 = & \frac{\theta}{1-\theta} \left[\pi_0^2 (1 + \theta\beta + (\theta\beta)^2 + \dots) + \beta \pi_1^2 (1 + \theta\beta + (\theta\beta)^2 + \dots) + \beta^2 \pi_2^2 (1 + \theta\beta + (\theta\beta)^2 + \dots) + \dots \right] + \\
 & + \frac{\omega(1-\omega)-1}{(1-\theta)} \left\{ \begin{aligned} & (\pi_0 - \pi_{-1})^2 + \beta \left[\theta (\pi_0 - \pi_{-1})^2 + (\pi_1 - \pi_0)^2 \right] + \\ & + \beta^2 (\pi_2 - \pi_1)^2 (1 + \theta\beta + (\theta\beta)^2 + \dots) + \dots \end{aligned} \right\} \\
 = & \frac{1}{1-\theta\beta} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\frac{\theta}{1-\theta} \pi_t^2 + \frac{\omega(1-\omega)-1}{(1-\theta)} (\pi_t - \pi_{t-1})^2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Funkcja dobrobytu (1)

Wobec tego mamy we wzorze (18):

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{U_t - \bar{U}}{\bar{C}^{1-\sigma}} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{2} \mu \frac{1}{1-\theta\beta} \left[\frac{\theta}{1-\theta} \pi_t^2 + \frac{\omega(1-\omega)^{-1}}{(1-\theta)} (\pi_t - \pi_{t-1})^2 \right] + \\ &-\frac{1}{2} (\sigma + \phi) y_t^2 + (1 + \phi) y_t \epsilon_t^s + y_t \epsilon_t^d \end{aligned} \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \mu \frac{\theta}{(1-\theta)(1-\theta\beta)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ \begin{aligned} &\pi_t^2 + \mu^{-1} \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)}{\theta} (\sigma + \phi) y_t^2 + \\ &+ \frac{\omega}{\theta(1-\omega)} (\pi_t - \pi_{t-1})^2 + \\ &- 2\mu^{-1} \frac{(1-\theta)(1-\theta\beta)}{\theta} [(1 + \phi) \epsilon_t^s + \epsilon_t^d] y_t \end{aligned} \right\} \quad (20)
 \end{aligned}$$

Funkcja dobrobytu (2)

Zauważmy:

- taka funkcja dobrobytu to przybliżenie wartości funkcji użyteczności, zdefiniowane z dokładnością do stałej ($\bar{U}$, *tip*)...
- ...oraz do czynników skalujących
- zmienność y_t i π_t możemy uznać za zmniejszające dobrobyt – a więc bank centralny maksymalizując dobrobyt dany przez (20) minimalizuje równocześnie funkcję straty
- parametry przy y_t to lambda
- wyrażenie z $(\pi_t - \pi_{t-1})^2$ znika w modelu bez indeksacji do przeszłej inflacji, czyli gdy $\omega = 0$
- iloczyny y_t i wstrząsów zniknęłyby, gdybyśmy funkcję straty zdefiniowali w kategoriach logarytmicznego odchylenia produkcji od produkcji potencjalnej, a nie od stanu ustalonego
 - w modelach nowokeynesowskich produkcję potencjalną definiuje się jako poziom produkcji, jaki obserwowalibyśmy przy zadanych wartościach bieżących wstrząsów, gdyby ceny były idealnie elastyczne
 - nasz stan ustalony korzysta z większej liczby założeń niż tylko elastyczność cen w krótkim okresie

Plan prezentacji

- 1 Optymalna polityka pieniężna
- 2 Funkcja straty a dobrobyt społeczny
- 3 Domknięcie modelu NK z optymalną polityką pieniężną
- 4 Optymalna polityka pieniężna w Dynare
- 5 Zadania

Równania modelu i problem decyzyjny banku centralnego

Dla uproszczenia zapiszmy krzywą Phillipsa i krzywą IS jako:

$$y_t = E_t y_{t+1} - \sigma^{-1} (i_t - E_t \pi_{t+1} - r) + \sigma^{-1} (\epsilon_t^d - E_t \epsilon_{t+1}^d) \quad (21)$$

$$\pi_t = p_1\pi_{t-1} + p_2E_t\pi_{t+1} + p_3y_t + p_4\epsilon_t^d + p_5\epsilon_t^s \quad (22)$$

Będą to warunki ograniczające w problemie decyzyjnym banku centralnego:

$$\min_{y_t, \pi_t, i_t} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k E_t (\pi_{t+k}^2 + \lambda y_{t+k}^2)$$

Równania modelu i problem decyzyjny banku centralnego

Problem możemy rozwiązać na dwa sposoby:

- założyć, że bank centralny rozwiązuje ten sam problem co okres, a podmioty gospodarcze racjonalnie oczekują utrzymania tego postępowania (*commitment*)
- założyć, że bank centralny rozwiązuje ten problem jednorazowo (*discretion*), a podmioty gospodarcze nie biorą pod uwagę tej reguły i nie dyskontują jej w swoich oczekiwaniach (brak wiarygodnego zobowiązania)

Decyzja banku centralnego

W przypadku *commitment* mamy:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k E_t \{ (\pi_{t+k}^2 + \lambda y_{t+k}^2) + \phi_{1,t} [y_t - E_t y_{t+1} + \sigma^{-1} (i_t - E_t \pi_{t+1} - r) - \sigma^{-1} (\epsilon_t^d - E_t \epsilon_{t+1}^d)] + \phi_{2,t} [\pi_t - p_1 \pi_{t-1} - p_2 E_t \pi_{t+1} - p_3 y_t - p_4 \epsilon_t^d - p_5 \epsilon_t^s] \}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} = 2\lambda y_t + \phi_{1,t} - \beta^{-1} \phi_{1,t-1} - p_3 \phi_{2,t} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi_t} = 2\pi_t - (\beta\sigma)^{-1} \phi_{1,t-1} + \phi_{2,t} - \beta^{-1} p_2 \phi_{2,t-1} - \beta p_1 \phi_{2,t+1} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_t} = \sigma^{-1} \phi_{1,t} = 0 \quad (25)$$

Decyzja banku centralnego – interpretacja

- Mamy model z 5 równaniami: (21), (22), (23), (24), (25) oraz 5 zmiennymi: y_t , π_t , i_t , $\phi_{1,t}$, $\phi_{2,t}$.
- Z równania 25 wiemy, że $\phi_{1,t} = 0$, co pozwala nam uprościć równania (23)-(24) i zredukować model do 4 zmiennych.
- W zredukowanym modelu równanie (21) możemy potraktować jako wzór na i_t , a sam model dalej zredukować do 3 równań: (22), uproszczonego (23) i uproszczonego (24) ze względu na zmienne $y_t, \pi_t, \phi_{2,t}$.
- Równanie (23) możemy przekształcić do wzoru na y_t , a następnie podstawić do równania (22) oraz (24), otrzymując ostatecznie model dwurównaniowy:

$$\pi_t = p_1 \pi_{t-1} + p_2 E_t \pi_{t+1} + (p_3)^2 (2\lambda)^{-1} \phi_{2,t} + p_4 \epsilon_t^d + p_5 \epsilon_t^s$$

$$2\pi_t + \phi_{2,t} - \beta^{-1} p_2 \phi_{2,t-1} - \beta p_1 \phi_{2,t+1} = 0$$

Plan prezentacji

- 1 Optymalna polityka pieniężna
- 2 Funkcja straty a dobrobyt społeczny
- 3 Domknięcie modelu NK z optymalną polityką pieniężną
- 4 Optymalna polityka pieniężna w Dynare
- 5 Zadania

Polityka optymalna w Dynare

```
parameters sigma ... r mu lambda
optimal_policy_discount_factor;

sigma = 0.5;

phi = 1;

...

rho = 0;

mu = 3;

lambda = ...;

optimal_policy_discount_factor = beta;
```

Z bloku model usuwamy wiersz:

```
i = ...
```

oraz definicje parametrów reguły Taylora, wstrząs monetarny i jego wariancję.

Jako osobny blok, po specyfikacji równań modelu, dodajemy:

```
planner_objective pi^2 + lambda*y^2;
```

Zamiast polecenia `stoch_simul` pojawia się:

```
ramsey_policy;
```

Mnożniki Lagrange'a w Dynare

- Zwróćmy uwagę na pojawienie się zmiennych **MULT_1** oraz **MULT_2** w tabeli “Policy and transition functions”.
- To odpowiedniki $\phi_{1,t}$ oraz $\phi_{2,t}$.

Zadania

Zadanie 1

Porównaj odpowiedzi poszczególnych zmiennych na wstrząs popytowy przy regule Taylora i przy polityce optymalnej.

Zadania

Zadanie 2

- ❶ Porównajmy macierz `oo_.dr.ghx` (i odpowiednio `ghu`) z tabelą “Policy and transition functions” dla pliki `NK_optimum.mod`. Czy wszystkie liczby z macierzy można odnaleźć w tabeli?
- ❷ Zanotuj zawartość macierzy `oo_.dr.ghx`, a następnie wykonaj skrypt `NK_optimum_replica.mod`. Przeanalizuj ten skrypt przy użyciu materiałów do tych zajęć. Jakie są różnice między modelem `NK_optimum` a `NK_optimum_replica`?
- ❸ Czym są liczby, których nie udało nam się zidentyfikować w punkcie 1? Odpowiedz na podstawie tabeli “Policy and transition functions” do modelu `NK_optimum_replica.mod`.