

Makroekonomia Zaawansowana

Ćwiczenia 5 – Mikropodstawy modelu nowokeynesowskiego: krzywa IS i krzywa Phillipsa

Andrzej Torój

Instytut Ekonometrii – Zakład Ekonometrii Stosowanej

Plan ćwiczeń

- 1 Decyzje gospodarstw domowych
- 2 Decyzje przedsiębiorstw
- 3 Decyzje banku centralnego

Objaśnienia

W tej części stosujemy następujące oznaczenia:

- wielkimi literami – zmienne modelu;
- małymi literami (odpowiednio) – procentowe odchylenia zmiennych modelu od wartości w stanie ustalonym (tzn. po log-linearyzacji);
- wstrząsy:
 - ε + indeks górny wielką literą – wstrząs w modelu, 1 w stanie ustalonym
 - ϵ + indeks góny małą literą – jego logarytm naturalny, 0 w stanie ustalonym

Plan prezentacji

1 Decyzje gospodarstw domowych

2 Decyzje przedsiębiorstw

3 Decyzje banku centralnego

Użyteczność gospodarstw domowych

Gospodarstwa domowe czerpią użyteczność z konsumpcji. Użyteczność jest zmniejszana przez czas pracy dostarczanej przez nie na rynek. Użyteczność z konsumpcji jest uzależniona od nawyków konsumpcyjnych uformowanych w poprzednim okresie. Funkcja użyteczności przyjmuje następującą postać funkcyjną:

$$U_t(C_t, N_t) = \varepsilon_t^D \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \quad (1)$$

gdzie C_t – zagregowana konsumpcja w okresie t ,

N_t – podaż pracy gospodarstw domowych w okresie t ,

ε_t^D – wstrząs popytowy w okresie t , $\sigma > 0$ i $\phi > 0$.

Gospodarstwa domowe maksymalizują w okresie t zdyskontowany strumień przyszłych użyteczności z czynnikiem dyskontowym $\beta \in (0, 1)$:

$$E_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k U(C_{t+k}, N_{t+k}) \rightarrow \max_{C_t, N_t} \quad (2)$$

Struktura konsumpcji

Producenci kontinuum różnorodnych dóbr, reprezentowanych przez odcinek $[0; 1]$ i indeksowanych jako n , sprzedają je na rynku konkurencji monopolistycznej gospodarstwom domowym. Koszyk konsumpcyjny gospodarstw domowych jest agregatem, z elastycznością substytucji między poszczególnymi dobrami na poziomie $\frac{\mu-1}{\mu}$, gdzie $\mu > 1$:

$$C_t \equiv \left(\int_0^1 C_{n,t}^{\frac{\mu-1}{\mu}} dn \right)^{\frac{\mu}{\mu-1}} \quad (3)$$

Im wyższe μ , tym wyższa elastyczność i tym łatwiejsza substytucja między poszczególnymi dobrami. Decyzja gospodarstwa domowego co do C_t wynika z poszczególnych n decyzji co do $C_{n,t}$.

Dodatkowo definiujemy w spójny sposób:

$$P_t \equiv \left(\int_0^1 P_{n,t}^{1-\mu} dn \right)^{\frac{1}{1-\mu}} \quad (4)$$

Ograniczenie budżetowe gospodarstw domowych

Maksymalizacja (2) przebiega przy sekwencji warunków ograniczających związanych z bieżącymi i przyszłymi ograniczeniami budżetowymi reprezentatywnego gospodarstwa domowego:

$$\forall_t \quad \int_0^1 P_{n,t} C_{n,t} dn + E_t \{Q_{t,t+1} D_{t+1}\} \leq D_t + W_t N_t \quad (5)$$

Prawa strona nierówności reprezentuje dochody gospodarstwa domowego w okresie t . Składają się one z dochodu uzyskanego z papierów wartościowych nabytych w przeszłości (D_t) i dochodów z pracy (W_t – płaca nominalna w okresie t). Lewa strona nierówności reprezentuje sumę wydatków gospodarstwa domowego na konsumpcję (przy czym P oznacza cenę dóbr z koszyka określonego indeksami w sposób analogiczny do zmiennych C) i zakup papierów wartościowych. $Q_{t,t+1}$ jest stochastycznym czynnikiem dyskontowym dla wypłat w okresie $t + 1$ z punktu widzenia gospodarstw domowych.

Problem optymalizacyjny gospodarstw domowych: podsumowanie

Kryterium maksymalizacji (2) implikuje spełnienie ograniczenia (5) jako równości. Stąd funkcja Lagrange'a wynikająca z równań (1)-(5):

$$\mathcal{L}_t = E_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left\{ \varepsilon_{t+k}^D \frac{\left[\left(\int_0^1 C_{n,t+k}^{\frac{\mu-1}{\mu}} dn \right)^{\frac{\mu}{\mu-1}} \right]^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_{t+k}^{1+\phi}}{1+\phi} + \right. \\ \left. - \lambda_t \left[\int_0^1 P_{n,t} C_{n,t} dn + E_t (Q_{t,t+1} D_{t+1}) - D_t - W_t N_t \right] \right\} \quad (6)$$

Warunki 1. rzędu gospodarstw domowych

Różniczkowanie po zmiennych decyzyjnych w t , tzn. poszczególnych $C_{n,t}$ dla każdego n , N_t oraz D_{t+1} pozwala kolejno otrzymać następujące warunki pierwszego rzędu $\forall_t$:

$$\forall_n \quad \varepsilon_t^D C_t^{-\sigma + \frac{1}{\mu}} C_{n,t}^{-\frac{1}{\mu}} - \lambda_t P_{n,t} = 0 \quad (7)$$

$$-N_t^\phi + \lambda_t W_t = 0 \quad (8)$$

$$-\lambda_t E_t Q_{t,t+1} + \beta E_t \lambda_{t+1} = 0 \quad (9)$$

Warunek 1: popyt na dobro n (1)

Warunek (7) dla dowolnego dobra n zapisujemy w postaci

$\varepsilon_t^D C_t^{-\sigma + \frac{1}{\mu}} C_{n,t}^{-\frac{1}{\mu}} = \lambda_t P_{n,t}$ podnosimy stronami do potęgi $1 - \mu$, a następnie sumujemy takie warunki dla wszystkich dóbr n :

$$\int_0^1 (\lambda_t P_{n,t})^{1-\mu} dn = \int_0^1 \left(\varepsilon_t^D C_t^{-\sigma + \frac{1}{\mu}} C_{n,t}^{-\frac{1}{\mu}} \right)^{1-\mu} dn$$

Wyłączenie elementów stałych ze względu na n oraz użycie definicji (3) i (4) prowadzi do zapisu $\lambda_t P_t = \varepsilon_t^D C_t^{-\sigma + \frac{1}{\mu}} C_t^{-\frac{1}{\mu}}$, skąd po uproszczeniu wyznaczamy λ_t :

$$\lambda_t = P_t^{-1} \varepsilon_t^D C_t^{-\sigma} \quad (10)$$

Warunek 1: popyt na dobro n (2)

Podstawienie (10) do (7) prowadzi ostatecznie do równania popytu na każde z dóbr n :

$$C_{n,t} = \left(\frac{P_{n,t}}{P_t} \right)^{-\mu} C_t \quad (11)$$

Warunek 2: podaż pracy

Podstawmy dodatkowo (10) do (8), by wyeliminować mnożnik Lagrange'a. Po uporządkowaniu otrzymujemy:

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{C_t^\sigma N_t^\phi}{\varepsilon_t^D} \quad (12)$$

Zauważmy, że to równość pomiędzy płacą realną (lewa strona) a krańcową stopą substytucji między czasem wolnym a konsumpcją (wyznamy ją, dzieląc pochodną (1) po czasie wolnym, czyli $1 - N_t$, przez pochodną po C_t – prawa strona).

Po log-linearyzacji (patrz przykład 3 na zajęciach o log-linearyzacji):

$$w_t - p_t = \phi n_t + \sigma c_t - \varepsilon_t^D \quad (13)$$

Warunek 3: równanie Eulera dla konsumpcji (1)

Definiujemy stochastyczny czynnik dyskontowy $Q_{t,t+1}$ z warunku (5) jako:

$$Q_{t,t+1} \equiv \frac{V_{t,t+1}}{\xi_{t,t+1}} \quad (14)$$

gdzie $V_{t,t+1}$ jest ceną w okresie t papierów wartościowych Arrowa, tzn. jednookresowych papierów wartościowych wypłacających w okresie $t+1$ kwotę 1, jeżeli zrealizuje się określony stan natury i 0 w przeciwnym przypadku. Symbol $\xi_{t,t+1}$ oznacza prawdopodobieństwo wystąpienia w okresie $t+1$ stanu natury, w którym wypłata wynosi 1, w ujęciu warunkowym względem stanu natury w okresie t . Mając dostęp do takiego rynku papierów wartościowych, gospodarstwa domowe mogą decydować o międzyokresowym przenoszeniu użyteczności, maksymalizując jej zdyskontowany strumień.

Warunek 3: równanie Eulera dla konsumpcji (2)

Podstawiając (10) oraz (14) do (9) i przegrupowując wyrazy, otrzymujemy:

$$\frac{V_{t,t+1}}{P_t} \varepsilon_t^D C_t^{-\sigma} = \beta \xi_{t,t+1} \frac{1}{E_t P_{t+1}} E_t \left(\varepsilon_{t+1}^D C_{t+1}^{-\sigma} \right) \quad (15)$$

Możemy uznać, że w optymalnym przypadku zachodzi równość pomiędzy:

- (L) utratą użyteczności w okresie t , wynikającą z zakupu w tym okresie jednego papieru Arrowa o wartości $V_{t,t+1}$ zamiast przeznaczenia tych samych środków pieniężnych na konsumpcję (której jednostka kosztuje P_t), co powoduje, że użyteczność jest niższa niż mogłaby być bez tej operacji o liczbę dodatkowych jednostek konsumpcji $\frac{V_{t,t+1}}{P_t}$ pomnożoną przez krańcową użyteczność z konsumpcji $\varepsilon_t^D C_t^{-\sigma}$;
- (P) zdyskontowanym (o β) wzrostem użyteczności w okresie $t+1$, następującym z prawdopodobieństwem $\xi_{t,t+1}$ i wynikającym z faktu, że papier Arrowa zakupiony w poprzednim okresie przyniósł wypłatę 1, pozwolił skosztować dodatkowych $\frac{1}{P_{t+1}}$ jednostek, z których każda podniosła użyteczność o krańcową wartość $\varepsilon_{t+1}^D C_{t+1}^{-\sigma}$

przy czym wielkości C_{t+1} oraz P_{t+1} w powyższym równaniu należy interpretować jako wartości oczekiwane warunkowe względem stanu natury, w którym wypłata jest > 0 .

Warunek 3: równanie Eulera dla konsumpcji (3)

Przy zastosowaniu definicji $Q_{t,t+1}$ z równania (14), zależność (15) może zostać zapisana jako:

$$E_t(Q_{t,t+1}) = \beta E_t \left[\frac{\varepsilon_{t+1}^D}{\varepsilon_t^D} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \right] \quad (16)$$

Log-linearyzacja równania (16) wokół stanu ustalonego (por. zadanie 5 z tego tematu) pozwala zapisać następującą zależność:

$$c_t = E_t c_{t+1} - \frac{1}{\sigma} [i_t - (E_t p_{t+1} - p_t) + \ln \beta] + \frac{1}{\sigma} (\epsilon_t^d - E_t \epsilon_{t+1}^d) \quad (17)$$

gdzie $i_t \equiv -\ln E_t(Q_{t,t+1})$ oznacza krótkookresową nominalną stopę procentową w okresie t , a $\epsilon_t^d = \ln \varepsilon_t^D$.

Warunek 3: równanie Eulera dla konsumpcji (4)

Po elementarnych uproszczeniach otrzymujemy następującą zależność:

$$c_t = E_t c_{t+1} - \frac{1}{\sigma} (i_t - E_t \pi_{t+1} - r) + \frac{1}{\sigma} (\epsilon_t^d - E_t \epsilon_{t+1}^d) \quad (18)$$

gdzie $E_t \pi_{t+1} = E_t p_{t+1} - p_t$ oznacza oczekiwany wzrost indeksu cen krajowego konsumenta, zaś $r \equiv -\ln \beta$ – naturalną stopę procentową odpowiadającą czynnikowi dyskontowemu gospodarstw domowych (β).

Krzywa IS

Gospodarka jest zamknięta, nie ma inwestycji i kapitału. A zatem skonsumować możemy wyłącznie to, co wyprodukowaliśmy, czyli Y_t (ograniczenie zasobowe):

$$Y_t = C_t \quad (19)$$

Analogiczne ograniczenie dotyczy oczywiście każdego z n rynków z osobna.

Równanie Eulera z uwzględnieniem warunku równowagi (19):

$$y_t = E_t y_{t+1} - \frac{1}{\sigma} (i_t - E_t \pi_{t+1} - r) + \frac{1}{\sigma} (\epsilon_t^d - E_t \epsilon_{t+1}^d) \quad (20)$$

Decyzje gospodarstw domowych: podsumowanie

Maksymalizacja użyteczności gospodarstw domowych doprowadziła nas do następujących warunków:

- Krzywa IS (20), sterująca reakcjami konsumpcji i produkcji na zmiany realnej stopy procentowej i na wstrząsy popytowe.
- Równanie podaży pracy (13).
- Równanie popytu na określony rodzaj dóbr n (11).

Równanie IS włączymy do modelu bezpośrednio, a do równań podaży pracy i popytu na dobro n będziemy wracać – przy charakteryzowaniu decyzji przedsiębiorstw, prowadzących do krzywej Phillipsa.

Zadanie 1

Czasami wprowadza się do modeli tzw. nawyki konsumpcyjne (ang. *consumption habits*). Polegają one na tym, że konsumenci przyzwyczajają się do określonego poziomu konsumpcji i gdy występuje on któryś raz z rzędu, użyteczność z niej jest niższa, niż gdy osiąga się ten poziom po raz pierwszy po wzroście. Formalnie, definiuje się wówczas funkcję użyteczności jako:

$$U_t(C_t, N_t) = \varepsilon_t^D \frac{(C_t - hC_{t-1})^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi} \quad (21)$$

przy czym $h \in [0, 1)$. Wyprowadź równania (13) oraz (20) przy obecności nawyków konsumpcyjnych. (Uwaga! Log-linearyzacje staną się nieco trudniejsze niż dotychczas – trzymajmy się wzoru, a nie analogii do wyprowadzeń już dokonanych!).

Plan prezentacji

- 1 Decyzje gospodarstw domowych
- 2 Decyzje przedsiębiorstw
- 3 Decyzje banku centralnego

Technologia

Producenci homogenicznego dobra używają podobnych technologii, opisanych następującą funkcją produkcji:

$$Y_{n,t} = (N_{n,t})^a (\varepsilon_{n,t}^S) \quad (22)$$

przy czym $\varepsilon_{n,t}^S$ jest egzogenicznym procesem technologicznym.

Przy log-linearyzowanym modelu (upraszczające założenie, do którego jeszcze wrócimy!) agregacja funkcji produkcji poszczególnych dóbr jest prosta i sprowadza się do zapisu:

$$Y_t = (N_t)^a (\varepsilon_t^S) \quad (23)$$

Dla dalszego uproszczenia przyjmijmy, że $a = 1$, tzn. występują stałe korzyści skali w funkcji produkcji.

Realny koszt krańcowy (1)

Najpierw zdefiniujmy krańcowy produkt pracy:

$$MPN_t \equiv \frac{\partial Y_t}{\partial N_t} = \varepsilon_t^S \quad (24)$$

Realny koszt krańcowy to iloraz realnego wynagrodzenia pracy przez jej krańcowy produkt:

$$MC_t = \frac{W_t/P_t}{MPN_t} = \frac{C_t^\sigma N_t^\phi / \varepsilon_t^D}{\varepsilon_t^S} \quad (25)$$

przy czym skorzystaliśmy tu z równania podaży pracy (12).

Realny koszt krańcowy (2)

Po log-linearyzacji otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 mc_t &= \sigma c_t + \phi n_t - \epsilon_t^d - \epsilon_t^s = \\
 &= \sigma y_t + \phi (y_t - \epsilon_t^s) - \epsilon_t^d - \epsilon_t^s = \\
 &= (\sigma + \phi) y_t - \epsilon_t^d - (1 + \phi) \epsilon_t^s
 \end{aligned} \tag{26}$$

przy czym druga równość wykorzystuje (23) (w formie log-linearyzowanej) oraz (19).

Proces cenotwórczy

- W gospodarce występują sztywności cenowe. Do ich modelowania zwykle służy mechanizm Calvo.
- W danym okresie stały odsetek producentów $\theta \in (0; 1)$ nie może reoptymalizować cen swoich produktów w reakcji na wstrząsy dotyczące gospodarkę i w konsekwencji musi je sprzedawać po cenach z poprzedniego okresu.
- Prawdopodobieństwo, że uda się dokonać reoptymalizacji ceny jest w każdym okresie identyczne w przypadku wszystkich producentów i wynosi $1 - \theta$, niezależnie od ilości czasu, jaka upłynęła od ostatniej zmiany ceny.
- Niektórzy spośród producentów dysponujących możliwością zmiany ceny nie dokonują prawdziwej reoptymalizacji, a jedynie indeksują ceny do przeszłej inflacji. Mechanizm ten prowadzi do popularnej w literaturze empirycznej hybrydowej krzywej Phillipsa. Jest to specyfikacja ogólniejsza (obejmuje nową krzywą Phillipsa wspartą oczekiwaniami). Pozwala ona wbudować do modelu tzw. uporczywość inflacji (ang. *inflation persistence*).

Proces cenotwórczy

- W gospodarce występują sztywności cenowe. Do ich modelowania zwykle służy mechanizm Calvo.
- W danym okresie stały odsetek producentów $\theta \in (0; 1)$ nie może reoptymalizować cen swoich produktów w reakcji na wstrząsy dotyczące gospodarke i w konsekwencji musi je sprzedawać po cenach z poprzedniego okresu.
- Prawdopodobieństwo, że uda się dokonać reoptymalizacji ceny jest w każdym okresie identyczne w przypadku wszystkich producentów i wynosi $1 - \theta$, niezależnie od ilości czasu, jaka upłynęła od ostatniej zmiany ceny.
- Niektórzy spośród producentów dysponujących możliwością zmiany ceny nie dokonują prawdziwej reoptymalizacji, a jedynie indeksują ceny do przeszłej inflacji. Mechanizm ten prowadzi do popularnej w literaturze empirycznej hybrydowej krzywej Phillipsa. Jest to specyfikacja ogólniejsza (obejmuje nową krzywą Phillipsa wspartą oczekiwaniami). Pozwala ona wbudować do modelu tzw. uporczywość inflacji (ang. *inflation persistence*).

Proces cenotwórczy

- W gospodarce występują sztywności cenowe. Do ich modelowania zwykle służy mechanizm Calvo.
- W danym okresie stały odsetek producentów $\theta \in (0; 1)$ nie może reoptymalizować cen swoich produktów w reakcji na wstrząsy dotyczące gospodarkę i w konsekwencji musi je sprzedawać po cenach z poprzedniego okresu.
- Prawdopodobieństwo, że uda się dokonać reoptymalizacji ceny jest w każdym okresie identyczne w przypadku wszystkich producentów i wynosi $1 - \theta$, niezależnie od ilości czasu, jaka upłynęła od ostatniej zmiany ceny.
- Niektórzy spośród producentów dysponujących możliwością zmiany ceny nie dokonują prawdziwej reoptymalizacji, a jedynie indeksują ceny do przeszłej inflacji. Mechanizm ten prowadzi do popularnej w literaturze empirycznej hybrydowej krzywej Phillipsa. Jest to specyfikacja ogólniejsza (obejmuje nową krzywą Phillipsa wspartą oczekiwaniami). Pozwala ona wbudować do modelu tzw. upórcożywość inflacji (ang. *inflation persistence*).

Proces cenotwórczy

- W gospodarce występują sztywności cenowe. Do ich modelowania zwykle służy mechanizm Calvo.
- W danym okresie stały odsetek producentów $\theta \in (0; 1)$ nie może reoptymalizować cen swoich produktów w reakcji na wstrząsy dotyczące gospodarkę i w konsekwencji musi je sprzedawać po cenach z poprzedniego okresu.
- Prawdopodobieństwo, że uda się dokonać reoptymalizacji ceny jest w każdym okresie identyczne w przypadku wszystkich producentów i wynosi $1 - \theta$, niezależnie od ilości czasu, jaka upłynęła od ostatniej zmiany ceny.
- Niektórzy spośród producentów dysponujących możliwością zmiany ceny nie dokonują prawdziwej reoptymalizacji, a jedynie indeksują ceny do przeszłej inflacji. Mechanizm ten prowadzi do popularnej w literaturze empirycznej hybrydowej krzywej Phillipsa. Jest to specyfikacja ogólniejsza (obejmuje nową krzywą Phillipsa wspartą oczekiwaniami). Pozwala ona wbudować do modelu tzw. uporczywość inflacji (ang. *inflation persistence*).

Mechanizm Calvo (1)

Jeżeli kontinuum producentów jest reprezentowanych przez odcinek $\langle 0; 1 \rangle$, a ta część z nich, która w okresie t nie może dokonać zmiany cen, jako $\langle 0; \theta \rangle$, wówczas poziom cen w okresie t możemy zapisać – zgodnie z definicją (4):

$$P_t = \left[\int_0^\theta (P_{n,t-1})^{1-\mu} dn + (1-\theta) (\tilde{P}_t)^{1-\mu} \right]^{\frac{1}{1-\mu}} \quad (27)$$

gdzie μ – elastyczność substytucji między poszczególnymi rodzajami dóbr, a $\tilde{P}_t$ – nowy, średni poziom zmienionych cen. **Korzystając z faktu, że dobór części θ producentów zmieniających ceny w okresie t ma charakter losowy, a zatem możemy uznać strukturę niezmiennych cen za odzwierciedlenie rozkładu cen w całej gospodarce, zapisujemy:**

$$P_t = \left[\theta (P_{t-1})^{1-\mu} + (1-\theta) (\tilde{P}_t)^{1-\mu} \right]^{\frac{1}{1-\mu}} \quad (28)$$

Mechanizm Calvo (2)

Potęgując do $(1 - \mu)$ oraz dzieląc obie strony przez $(P_{t-1})^{1-\mu}$, otrzymujemy:

$$\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)^{1-\mu} = \theta + (1 - \theta) \left(\frac{\tilde{P}_t}{P_{t-1}}\right)^{1-\mu} \quad (29)$$

Log-linearyzacja równania (29) w otoczeniu bezinflacyjnego stanu ustalonego (por. zadanie 6 z tego tematu) prowadzi do następującej zależności:

$$\pi_t = (1 - \theta) (\tilde{p}_t - p_{t-1}) \quad (30)$$

gdzie p_t oznacza logarytm cen P_t (i odpowiednio dla cen średnich nowoustalonych cen), a $\pi_t = p_t - p_{t-1}$.

Indeksacja do przeszłej inflacji (1)

Wśród producentów, którzy dokonują zmiany ceny, istnieje odsetek $1 - \omega$ producentów reoptymalizujących w sposób antycypacyjny, zgodnie z mechanizmem Calvo. Maksymalizują oni zdyskontowany oczekiwany strumień przyszłych zysków na podstawie wszystkich informacji dostępnych w czasie podejmowania decyzji oraz przy uwzględnieniu przyszłych, z góry znanych ograniczeń (ustalając je na poziomie $p_{f,t}$). Reszta producentów (ω) zmienia ceny na podstawie ich przeszłej dynamiki (ustalając je na poziomie $p_{b,t}$):

$$\tilde{p}_t = \omega p_{b,t} + (1 - \omega) p_{f,t} \quad (31)$$

Ceny ustalane przez tę drugą grupę producentów są modelowane jako optymalne ceny z poprzedniego okresu, powiększone zgodnie ze stopą inflacji z poprzedniego okresu:

$$p_{b,t} = \tilde{p}_{t-1} + \pi_{t-1} \quad (32)$$

Indeksacja do przeszłej inflacji (2)

Podstawiając (32) do (31) otrzymujemy:

$$\tilde{p}_t = \omega \tilde{p}_{t-1} + \omega \pi_{t-1} + (1 - \omega) p_{f,t} \quad (33)$$

Porządkując wyrazy i przesuwając (33) o 1 okres w przód, a następnie obliczając warunkową wartość oczekiwaną w chwili t , otrzymujemy:

$$E_t \tilde{p}_{t+1} - \omega \tilde{p}_t = \omega \pi_t + (1 - \omega) E_t p_{f,t+1} \quad (34)$$

Przesuwamy podobnie o 1 okres w przód równanie (30) i odejmujemy od niego pomnożoną przez ω , wyjściową postać tego samego równania:

$$E_t \pi_{t+1} - \omega \pi_t = (1 - \theta) (E_t \tilde{p}_{t+1} - \omega \tilde{p}_t - p_t + \omega p_{t-1}) \quad (35)$$

Indeksacja do przeszłej inflacji (3)

Do równania (35) podstawiamy (34):

$$\begin{aligned} E_t \pi_{t+1} - \omega \pi_t &= (1 - \theta) (\omega \pi_t + (1 - \omega) E_t p_{f,t+1} - p_t + \omega p_{t-1}) \\ &= (1 - \theta) (1 - \omega) (E_t p_{f,t+1} - p_t) \end{aligned}$$

Na potrzeby przyszłych odwołań, pozostawmy na razie równanie w postaci:

$$E_t p_{f,t+1} - p_t = \frac{1}{(1 - \theta)(1 - \omega)} (E_t \pi_{t+1} - \omega \pi_t) \quad (36)$$

Problem producenta – optymalna nowa cena (1)

Producenci wybierają $P_{f,t}$. Problem decyzyjny polega na maksymalizacji zdyskontowanej oczekiwanej wartości strumienia przyszłych zysków, warunkowego względem założenia, że producent “utknie” ze zmienioną teraz ceną na dobre. Dobór takich producentów jest losowy i niezależny w każdym okresie, a zatem odbywa się z prawdopodobieństwem θ za 1 okres, θ^2 za 2 okresy itd.:

$$\max_{P_{f,t}} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \{ Q_{t,t+k} [P_{f,t} Y_{t+k|t} - \psi_{t+k}(Y_{t+k|t})] \} \quad (37)$$

gdzie ψ_{t+k} – funkcja kosztu w okresie $t+k$.

Problem producenta – optymalna nowa cena (2)

Maksymalizację ogranicza sekwencja warunków związanych z popytem na produkcję cenotwórcy, wynikającej z funkcji popytu na dobro (równanie (7) oraz warunek równowagi (19)):

$$Y_{t+k|t} = \left(\frac{P_{f,t}}{P_{t+k}} \right)^{-\mu} Y_{t+k} \quad (38)$$

$Q_{t,t+k}$ jest stochastycznym czynnikiem dyskontowym między okresem t a $t+k$ (por. równania (5), (14) i (16)), a $Y_{t+k} (P_{t+k})$ – zmieniającym się w czasie poziomem produkcji (cen) w gospodarce w okresie $t+k$. Zauważmy, że zapisy $Y_{t+k|t}$ oraz $P_{f,t}$ odnoszą się do sytuacji konkretnego producenta, który nie może zmienić ceny.

Rozwiązanie producenta (1): warunek 1. rzędu

Wyznaczamy pochodną (37) po $P_{f,t}$ przy warunku (38). Pamiętajmy przy tym, że $Y_{t+k|t}$ jest funkcją $P_{f,t}$ i wyznaczmy najpierw pomocniczo (na podstawie równania (38)):

$$\frac{\partial Y_{t+k|t}}{\partial P_{f,t}} = \left(\frac{P_{f,t}}{P_{t+k}} \right)^{-\mu} Y_{t+k} \cdot (-\mu) \frac{P_{t+k}}{P_{f,t}} \frac{1}{P_{t+k}} = -\mu Y_{t+k|t} P_{f,t}^{-1} \quad (39)$$

Wyznaczając pochodną wyrażenia (37) przy podstawieniu do tego wyrażenia $Y_{t+k|t}$ z równania (38) otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} \left[Y_{t+k|t} + P_{f,t} \frac{\partial Y_{t+k|t}}{\partial P_{f,t}} - \psi'_{t+k|t} \frac{\partial Y_{t+k|t}}{\partial P_{f,t}} \right] \right\} = 0 \quad (40)$$

gdzie $\psi'_{t+k|t} \equiv \frac{\partial \psi_{t+k}}{\partial Y_{t+k|t}}$.

Rozwiązanie producenta (2): warunek 1. rzędu

Po uwzględnieniu równania (39) i wyłączeniu $Y_{t+k|t}$ poza nawias kwadratowy mamy:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left[(1 - \mu) - \psi'_{t+k|t} P_{f,t}^{-1} \cdot (-\mu) \right] \right\} = 0 \quad (41)$$

Mnożąc (41) obustronnie przez $\frac{P_{f,t}}{1-\mu}$ otrzymujemy ostatecznie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left[P_{f,t} - \frac{\mu}{\mu - 1} \psi'_{t+k|t} \right] \right\} = 0 \quad (42)$$

Rozwiązanie producenta (3): warunek 1. rzędu

Wyrażenie $\frac{\mu}{\mu-1}$ możemy interpretować jako marżę zysku, czyli przewagę nowo ustalonej ceny nad kosztem krańcowym, w sytuacji bez ograniczeń co do częstotliwości dostosowań cenowych (pamiętajmy, że $\mu > 1$; porównaj (3)). Np. dla $\mu = 3$ mamy $\frac{\mu}{\mu-1} = \frac{3}{2} = 1,5$, co oznacza marżę w wysokości 50% krańcowego kosztu wytworzenia. Dzielimy równanie (42) przez P_{t-1} , otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left[\frac{P_{f,t}}{P_{t-1}} - \frac{\mu}{\mu-1} \underbrace{\frac{\psi'_{t+k|t}}{P_{t+k}}}_{MC_{t+k|t}} \frac{P_{t+k}}{P_{t-1}} \right] \right\} = 0 \quad (43)$$

gdzie $MC_{t+k|t}$ – realny koszt krańcowy w okresie $t+k$ dla firmy, która ostatnio zmieniła cenę w okresie t .

Rozwiązanie producenta (4): log-linearyzacja warunku

W bezinflacyjnym stanie ustalonym $\bar{P}_f = \bar{P} = \text{const}$ oraz $\bar{Q}_{t,t+k} \equiv \bar{Q}_k = \beta^k$. Zapiszmy najpierw równanie (43) dla takiego właśnie stanu ustalonego:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \beta^k \bar{Y} \left[1 - \frac{\mu}{\mu - 1} \bar{MC} \right] = 0$$

To oznacza, że $\bar{MC} = \frac{\mu-1}{\mu}$.

Rozwiązanie producenta (5): log-linearyzacja warunku

Log-linearyzacja (43) wg definicji przebiega następująco:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ \underbrace{\bar{Q}_k \bar{Y} \left[1 - \frac{\mu}{\mu-1} \bar{M}C \right]}_0 q_{t,t+k} + \underbrace{\bar{Y} \bar{Q}_k \left[1 - \frac{\mu}{\mu-1} \bar{M}C \right]}_0 y_{t+k|t} + \right. \\
 + \underbrace{\bar{M}C}_{\frac{\mu-1}{\mu}} \bar{Q}_k \bar{Y} \left[-\frac{\mu}{\mu-1} \frac{\bar{P}}{\bar{P}} \right] m_{t+k|t} + \bar{P} \bar{Q}_k \bar{Y} \left[\frac{1}{\bar{P}} \right] p_{f,t} + \bar{P} \bar{Q}_k \bar{Y} \left[-\frac{\mu}{\mu-1} \bar{M}C \frac{1}{\bar{P}} \right] p_{t+k} + \\
 \left. + \bar{P} \bar{Q}_k \bar{Y} \left[\bar{P} \left(-\frac{1}{\bar{P}^2} \right) - \underbrace{\frac{\mu}{\mu-1} \bar{M}C \bar{P}}_1 \left(-\frac{1}{\bar{P}^2} \right) \right] p_{t-1} \right\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Rozwiązanie producenta (6): log-linearyzacja warunku

Dzielimy obie strony (44) przez $\bar{Y}$ (zauważmy, że nie możemy tego zrobić wobec $\bar{Q}_k$, gdyż ten wyraz jest inny dla każdego składnika sumy – podstawiamy za to $\bar{Q}_k = \beta^k$). Po skróceniach, wykluczeniu wyrazów z zerowym parametrem i uporządkowaniu otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \beta^k (-mc_{t+k|t} + p_{f,t} - p_{t-1} + p_{t-1} - p_{t+k}) = 0$$

Wyrazy zależne od k oraz $+p_{t-1}$ przenosimy na prawą stronę, a niezależne od k wyłączamy przed znak sumy:

$$(p_{f,t} - p_{t-1}) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k (mc_{t+k|t} + p_{t+k} - p_{t-1})$$

Rozwiązanie producenta (7): uproszczenie nieskończonej sumy

Zauważamy, że po lewej stronie sumowany jest ciąg geometryczny z pierwszym wyrazem 1 i ilorazem $\beta\theta$. Suma takiego ciągu wynosi $(1 - \beta\theta)^{-1}$ i mnożymy obie strony równania przez odwrotność tej sumy, otrzymując ostatecznie:

$$p_{f,t} - p_{t-1} = (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t (mc_{t+k|t} + p_{t+k} - p_{t-1}) \quad (45)$$

Rozwiązanie producenta (8): warunkowy koszt krańcowy

Symbol $mc_{t+k|t}$ oznacza realny koszt krańcowy danego producenta warunkowy względem cen ustalonych w okresie t . Przy płacy realnej stałej dla wszystkich producentów, warunkowość ta dotyczy wyłącznie krańcowego produktu pracy (por. (24)):

$$mc_{t+k|t} = w_{t+k} - p_{t+k} - \textcolor{blue}{mpn}_{t+k|t} \quad (46)$$

W przypadku $a = 1$ (i tylko w tym przypadku!) w równaniu (23), MPN_T nie zależy od Y_t , a jedynie od ε_t^S , co czyni tę warunkowość bezprzedmiotową, gdyż ε_t^S jest egzogeniczne:

$$mc_{t+k|t} = w_{t+k} - p_{t+k} - \textcolor{red}{\varepsilon}_t^S = mc_{t+k} \quad (47)$$

Upraszcza to równanie (45) do postaci:

$$p_{f,t} - p_{t-1} = (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t (mc_{t+k} + p_{t+k} - p_{t-1}) \quad (48)$$

Rozwiązanie producenta (9): nieskończone sumy

Zauważmy, że prawą stronę równania (48) możemy rozbić na dwie grupy składników:

$$\begin{aligned}
 p_{f,t} - p_{t-1} &= (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t(mc_{t+k} + p_{t+k} - p_{t-1}) = \\
 &= (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t(mc_{t+k}) + \\
 &\quad + (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t(p_{t+k} - p_{t-1})
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

Rozwiązanie producenta (10): nieskończone sumy

Przyjrzyjmy się drugiej z tych grup:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t (p_{t+k} - p_{t-1}) \\
 = & (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t (p_{t+k} - \textcolor{red}{p}_{t+k-1} + \textcolor{red}{p}_{t+k-1} - \textcolor{blue}{p}_{t+k-2} + \textcolor{blue}{p}_{t+k-2} + \dots - p_{t-1}) = \\
 = & (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t (\pi_{t+k} + \pi_{t+k-1} + \dots + \pi_t) = \\
 = & (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \left(\sum_{i=0}^k \pi_{t+i} \right) = \\
 = & (1 - \beta\theta) \left\{ E_t \pi_t \left[(\beta\theta)^0 + (\beta\theta)^1 + (\beta\theta)^2 + \dots \right] + E_t \pi_{t+1} \left[(\beta\theta)^1 + (\beta\theta)^2 + \dots \right] + \right. \\
 & \left. + E_t \pi_{t+2} \left[(\beta\theta)^2 + \dots \right] + \dots \right\} = \\
 = & (1 - \beta\theta) \left[E_t \pi_t \frac{1}{1 - \beta\theta} + E_t \pi_{t+1} \frac{\beta\theta}{1 - \beta\theta} + E_t \pi_{t+2} \frac{(\beta\theta)^2}{1 - \beta\theta} + \dots \right] = \\
 = & (1 - \beta\theta) \frac{1}{1 - \beta\theta} \left[E_t \pi_t + \beta\theta E_t \pi_{t+1} + (\beta\theta)^2 E_t \pi_{t+2} + \dots \right] = \\
 = & \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \pi_{t+k}
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie producenta (11): quasi-różnicowanie

Ostatecznie (49) przyjmuje postać:

$$p_{f,t} - p_{t-1} = (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t mc_{t+k} + \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \pi_{t+k} \quad (50)$$

Zauważmy, że powyższe równanie możemy potraktować jako rozwiązanie problemu producenta optymalizującego cenę w okresie t ze względu na oczekiwaną przyszłą ścieżkę inflacji oraz realnych kosztów krańcowych – przy założeniu, że nie będzie miał możliwości dalszych zmian (a jeżeli będzie miał tę możliwość, to rozwiąże zadanie ponownie).

Rozwiązanie producenta (12): quasi-różnicowanie

Zapiszmy równanie (50) ponownie dla okresu $t + 1$:

$$p_{f,t+1} - p_t = (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_{t+1} mc_{t+k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_{t+1} \pi_{t+k+1} \quad (51)$$

Wyznamy warunkową względem t wartość oczekiwaną obu stron równania (51), pamiętając o tzw. prawie iterowanych oczekiwań ($E_t E_{t+1} x_{t+2} = E_t x_{t+2}$) oraz pomijając oczekiwania przy wartościach już znanych w t ($E_t x_t = x_t$):

$$E_t p_{f,t+1} - p_t = (1 - \beta\theta) \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t mc_{t+k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \pi_{t+k+1} \quad (52)$$

Rozwiązanie producenta (13): quasi-różnicowanie

Powyższy zapis jest równoznaczny z następującym:

$$0 = -(E_t p_{f,t+1} - p_t) + (1 - \beta\theta) \sum_{k=1}^{\infty} (\beta\theta)^{k-1} E_t m c_{t+k} + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta\theta)^{k-1} E_t \pi_{t+k} \quad (53)$$

Mnożymy (53) stronami przez $\beta\theta$:

$$0 = -\beta\theta (E_t p_{f,t+1} - p_t) + (1 - \beta\theta) \sum_{k=1}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t m c_{t+k} + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta\theta)^k E_t \pi_{t+k} \quad (54)$$

Odejmujemy stronami (50) minus (54):

$$p_{f,t} - p_{t-1} = \beta\theta (E_t p_{f,t+1} - p_t) + (1 - \beta\theta) m c_t + \pi_t \quad (55)$$

Hybrydowa krzywa Phillipsa (1)

Czas wrócić do równania (36) i podstawić je dwukrotnie (z czego raz przesunięte o 1 okres wstecz) do (55):

$$\frac{1}{(1-\theta)(1-\omega)} (\pi_t - \omega\pi_{t-1}) = \beta\theta \left[\frac{1}{(1-\theta)(1-\omega)} (E_t\pi_{t+1} - \omega\pi_t) \right] + (1-\beta\theta) mc_t + \pi_t$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \pi_t = & \frac{\omega}{\theta + \omega[1-\theta(1-\beta)]} \pi_{t-1} + \frac{\beta\theta}{\theta + \omega[1-\theta(1-\beta)]} E_t\pi_{t+1} + \\ & + \frac{(1-\omega)(1-\theta)(1-\beta\theta)}{\theta + \omega[1-\theta(1-\beta)]} mc_t \end{aligned} \quad (56)$$

Hybrydowa krzywa Phillipsa (2)

Uwzględnienie zależności mc_t od y_t oraz wstrząsów (26) pozwala wyrazić inflację jako funkcję luki PKB:

$$\begin{aligned} \pi_t = & \frac{\omega}{\theta + \omega[1 - \theta(1 - \beta)]} \pi_{t-1} + \frac{\beta\theta}{\theta + \omega[1 - \theta(1 - \beta)]} E_t \pi_{t+1} + \\ & + \frac{(1 - \omega)(1 - \theta)(1 - \beta\theta)}{\theta + \omega[1 - \theta(1 - \beta)]} [(\sigma + \phi) y_t - \epsilon_t^d - (1 + \phi) \epsilon_t^s] \end{aligned} \quad (57)$$

Zadanie 2

Wyprowadź hybrydową krzywą Phillipsa bez korzystania z założenia upraszczającego, że $a = 1$ we wzorze (23). Zauważ, że modyfikacji ulegną definicje MPN i MC , a warunkowy i bezwarunkowy koszt krańcowy będą się różniły.

Wskazówka: równanie bez producentów indeksujących do przeszłej inflacji (tzn. dla $\omega = 0$) przyjąłoby wówczas postać:

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \frac{(1-\theta)(1-\beta\theta)}{\theta} \cdot \frac{a}{a+(1-a)\mu} mc_t \quad (58)$$

Plan prezentacji

- 1 Decyzje gospodarstw domowych
- 2 Decyzje przedsiębiorstw
- 3 Decyzje banku centralnego

Reguła Taylora

Politykę pieniężną banku centralnego opisuje reguła Taylora z wygładzaniem.
Nominalna stopa procentowa jest ustalana zgodnie z równaniem:

$$i_t = r + \gamma_\rho (i_{t-1} - r) + (1 - \gamma_\rho) (\gamma_\pi \pi_t + \gamma_y y_t) + \varepsilon_t^i \quad (59)$$

gdzie:

i_t – stopa procentowa banku centralnego w okresie t ,

y_t – produkcja,

π_t – inflacja,

$\gamma_\rho \in (0; 1)$ – parametr wygładzania,

$\gamma_\pi > 1, \gamma_y > 0$ – parametry reakcji banku centralnego na odchylenia inflacji i produkcji od wartości równowagi,

r – jak we wzorze (18),

ε_t^i – wstrząs stopy procentowej w okresie t .

Zadanie 3

Zmodyfikuj uproszczoną wersję modelu w Dynare, tak aby odpowiadał opisanemu w tej prezentacji modelowi nowokeynesowskiemu dla gospodarki zamkniętej.

- Będą również 3 równania: krzywa IS, krzywa Phillipsa i reguła Taylora.
- Tym razem parametry w równaniach powinny być funkcją parametrów strukturalnych modelu.
- Wstrząsy występują w różnych równaniach, z przypisanymi im parametrami. Wstrząsy w postaci zredukowanej nie są już niezależne!

Zadanie 4

Zmodyfikuj model w Dynare z zadania 3 w taki sposób, by uwzględniał nawyki konsumpcyjne, wprowadzone w zadaniu 1. Wskazówka: będzie łatwiej “cofnąć” się do równania (56) i rozwiązać model z czterema, a nie z trzema równaniami.

Zadanie 5

Na podstawie artykułu “A note on deriving the New Keynesian Phillips Curve under positive steady state inflation” (Khan, Rudolf, 2005) zmodyfikuj model z zadania 3 w taki sposób, by uwzględnić przybliżenie wokół stanu ustalonego, w którym inflacja wynosi 2,5% rocznie. Dla uproszczenia przyjmij $\omega = 0$.

Wskazówka: standardowa parametryzacja modeli nowokeynesowskich dotyczy modeli kwartalnych. Oznacza to, że parametr π z ww. artykułu należy przyjąć na poziomie $(1,025)^{\frac{1}{4}}$.