

Makroekonomia Zaawansowana

Ćwiczenia 1 – Stan ustalony i log-linearyzacja

Andrzej Torój

Instytut Ekonometrii – Zakład Ekonometrii Stosowanej

Plan ćwiczeń

- 1 Praca z modelami DSGE
- 2 Stan ustalony
- 3 Log-linearyzacja
- 4 Zadania

Plan prezentacji

1 Praca z modelami DSGE

2 Stan ustalony

3 Log-linearyzacja

4 Zadania

Czym są modele DSGE?

- Na tych zajęciach poznamy podstawowe techniki pracy z modelami DSGE (ang. *Dynamic Stochastic General Equilibrium*).
- Za przykład posłużą nam modele nowokeynesowskie.
- Są to konstrukcje, które:
 - zawierają nieliniowe (a czasem bardzo nieliniowe...) relacje między zmiennymi;
 - zawierają zmienne w postaci OCZEKIWAŃ (oczekiwania na $t + 1$, $t + 2$ itd.);
 - praca z nimi wymaga ROZWIĄZANIA.

Czym są modele DSGE?

- Na tych zajęciach poznamy podstawowe techniki pracy z modelami DSGE (ang. *Dynamic Stochastic General Equilibrium*).
- Za przykład posłużą nam modele nowokeynesowskie.
- Są to konstrukcje, które:
 - zawierają nieliniowe (a czasem bardzo nieliniowe...) relacje między zmiennymi;
 - zawierają zmienne w postaci OCZEKIWAŃ (oczekiwania na $t + 1$, $t + 2$ itd.);
 - praca z nimi wymaga ROZWIĄZANIA.

Czym są modele DSGE?

- Na tych zajęciach poznamy podstawowe techniki pracy z modelami DSGE (ang. *Dynamic Stochastic General Equilibrium*).
- Za przykład posłużą nam modele nowokeynesowskie.
- Są to konstrukcje, które:
 - zawierają nieliniowe (a czasem bardzo nieliniowe...) relacje między zmiennymi;
 - zawierają zmienne w postaci OCZEKIWAŃ (oczekiwania na $t + 1$, $t + 2$ itd.);
 - praca z nimi wymaga ROZWIĄZANIA.

Czym są modele DSGE?

- Na tych zajęciach poznamy podstawowe techniki pracy z modelami DSGE (ang. *Dynamic Stochastic General Equilibrium*).
- Za przykład posłużą nam modele nowokeynesowskie.
- Są to konstrukcje, które:
 - zawierają nieliniowe (a czasem bardzo nieliniowe...) relacje między zmiennymi;
 - zawierają zmienne w postaci OCZEKIWAŃ (oczekiwania na $t + 1$, $t + 2$ itd.);
 - praca z nimi wymaga ROZWIĄZANIA.

Rozwiązanie modelu DSGE

Wyrażenie wektora zmiennych endogenicznych w modelu w okresie t jako funkcji wyłącznie:

- opóźnionych zmiennych endogenicznych;
- zmiennych egzogenicznych i wstrząsów (opóźnionych, bieżących i oczekiwanych).

To oznacza, że z modelu musimy wyrugować:

- bieżące zależności między zmiennymi endogenicznymi (zwykle łatwe – rozwiązanie układu równań);
- zmienne w postaci oczekiwań (znacznie trudniejsze).

$$\begin{array}{c} y_{1,t} \\ \updownarrow \\ y_{2,t} \end{array}$$

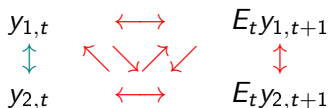
Rozwiązanie modelu DSGE

Wyrażenie wektora zmiennych endogenicznych w modelu w okresie t jako funkcji wyłącznie:

- opóźnionych zmiennych endogenicznych;
- zmiennych egzogenicznych i wstrząsów (opóźnionych, bieżących i oczekiwanych).

To oznacza, że z modelu musimy wyrugować:

- bieżące zależności między zmiennymi endogenicznymi (zwykle łatwe – rozwiązanie układu równań);
- zmienne w postaci oczekiwań (znacznie trudniejsze).



Jak rozwiązać model?

Łatwo to zrobić, jeżeli jest on **liniowy**. Jednak to zbyt restrykcyjne ograniczenie. Dlatego zwykle postępujemy w następujący sposób:

- ❶ Znajdujemy STAN USTALONY (ang. *steady state*)
 - równowaga: wektor wartości zmiennych endogenicznych, który – pod nieobecność nowych wstrząsów – zapewnia brak zmian tych zmiennych z okresu na okres
- ❷ LINEARYZACJA modelu, czyli sprowadzenie go do postaci liniowej.
 - Możemy znaleźć liniowe przybliżenie nieliniowej zależności w pobliżu pewnego punktu. Będzie nim stan ustalony.

Jak rozwiązać model?

Łatwo to zrobić, jeżeli jest on **liniowy**. Jednak to zbyt restrykcyjne ograniczenie. Dlatego zwykle postępujemy w następujący sposób:

- ❶ Znajdujemy STAN USTALONY (ang. *steady state*)
 - równowaga: wektor wartości zmiennych endogenicznych, który – pod nieobecność nowych wstrząsów – zapewnia brak zmian tych zmiennych z okresu na okres
- ❷ LINEARYZACJA modelu, czyli sprowadzenie go do postaci liniowej.
 - Możemy znaleźć liniowe przybliżenie nieliniowej zależności w pobliżu pewnego punktu. Będzie nim stan ustalony.

Rozwiązanie modelu DSGE

Gdy już się tego nauczymy, dowiemy się kolejno:

- czym są modele DSGE i po co w nich racjonalne oczekiwania;
- jak pracować z oprogramowaniem do ich analizy;
- jak wyprowadzić model nowokeynesowski model gospodarki zamkniętej;
- jak go rozwiązać;
- jak uogólnić go na model gospodarki otwartej;
- jak oszacować jego parametry metodami bayesowskimi;
- co to są modele polityki optymalnej;
- ... (?)

Rozwiązanie modelu DSGE

Gdy już się tego nauczymy, dowiemy się kolejno:

- czym są modele DSGE i po co w nich racjonalne oczekiwania;
- jak pracować z oprogramowaniem do ich analizy;
- jak wyprowadzić model nowokeynesowski model gospodarki zamkniętej;
- jak go rozwiązać;
- jak uogólnić go na model gospodarki otwartej;
- jak oszacować jego parametry metodami bayesowskimi;
- co to są modele polityki optymalnej;
- ... (?)

Rozwiązanie modelu DSGE

Gdy już się tego nauczymy, dowiemy się kolejno:

- czym są modele DSGE i po co w nich racjonalne oczekiwania;
- jak pracować z oprogramowaniem do ich analizy;
- jak wyprowadzić model nowokeynesowski model gospodarki zamkniętej;
- jak go rozwiązać;
- jak uogólnić go na model gospodarki otwartej;
- jak oszacować jego parametry metodami bayesowskimi;
- co to są modele polityki optymalnej;
- ... (?)

Rozwiązanie modelu DSGE

Gdy już się tego nauczymy, dowiemy się kolejno:

- czym są modele DSGE i po co w nich racjonalne oczekiwania;
- jak pracować z oprogramowaniem do ich analizy;
- jak wyprowadzić model nowokeynesowski model gospodarki zamkniętej;
- jak go rozwiązać;
- jak uogólnić go na model gospodarki otwartej;
- jak oszacować jego parametry metodami bayesowskimi;
- co to są modele polityki optymalnej;
- ... (?)

Rozwiązanie modelu DSGE

Gdy już się tego nauczymy, dowiemy się kolejno:

- czym są modele DSGE i po co w nich racjonalne oczekiwania;
- jak pracować z oprogramowaniem do ich analizy;
- jak wyprowadzić model nowokeynesowski model gospodarki zamkniętej;
- jak go rozwiązać;
- jak uogólnić go na model gospodarki otwartej;
- jak oszacować jego parametry metodami bayesowskimi;
- co to są modele polityki optymalnej;
- ... (?)

Rozwiązanie modelu DSGE

Gdy już się tego nauczymy, dowiemy się kolejno:

- czym są modele DSGE i po co w nich racjonalne oczekiwania;
- jak pracować z oprogramowaniem do ich analizy;
- jak wyprowadzić model nowokeynesowski model gospodarki zamkniętej;
- jak go rozwiązać;
- jak uogólnić go na model gospodarki otwartej;
- jak oszacować jego parametry metodami bayesowskimi;
- co to są modele polityki optymalnej;
- ... (?)

Rozwiązanie modelu DSGE

Gdy już się tego nauczymy, dowiemy się kolejno:

- czym są modele DSGE i po co w nich racjonalne oczekiwania;
- jak pracować z oprogramowaniem do ich analizy;
- jak wyprowadzić model nowokeynesowski model gospodarki zamkniętej;
- jak go rozwiązać;
- jak uogólnić go na model gospodarki otwartej;
- jak oszacować jego parametry metodami bayesowskimi;
- co to są modele polityki optymalnej;
- ... (?)

Rozwiązanie modelu DSGE

Gdy już się tego nauczymy, dowiemy się kolejno:

- czym są modele DSGE i po co w nich racjonalne oczekiwania;
- jak pracować z oprogramowaniem do ich analizy;
- jak wyprowadzić model nowokeynesowski model gospodarki zamkniętej;
- jak go rozwiązać;
- jak uogólnić go na model gospodarki otwartej;
- jak oszacować jego parametry metodami bayesowskimi;
- co to są modele polityki optymalnej;
- ... (?)

Rozwiązanie modelu DSGE

Gdy już się tego nauczymy, dowiemy się kolejno:

- czym są modele DSGE i po co w nich racjonalne oczekiwania;
- jak pracować z oprogramowaniem do ich analizy;
- jak wyprowadzić model nowokeynesowski model gospodarki zamkniętej;
- jak go rozwiązać;
- jak uogólnić go na model gospodarki otwartej;
- jak oszacować jego parametry metodami bayesowskimi;
- co to są modele polityki optymalnej;
- ... (?)

Plan prezentacji

- 1 Praca z modelami DSGE
- 2 Stan ustalony
- 3 Log-linearyzacja
- 4 Zadania

Stan ustalony w problemie Ramsey'a

Problem Ramsey'a: rolnik szuka stanu ustalonego

Rolnik sieje zboże i zbiera plony. Część z nich przeznaczy na mąkę (konsumpcja), a część na przyszłoroczny siew. Jakie są optymalne proporcje?

- W szerszym kontekście: problem alokacji zasobów między konsumpcję a oszczędności, które finansują inwestycje w kapitał (zapewniający przyszłą konsumpcję).
- Optymalna alokacja wynika zarówno z preferencji rolnika, jak i charakterystyki procesu produkcyjnego.

Model Ramseya

$$\max_{C_t, K_{t+1}} E_t \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \left[\beta^i \frac{C_{t+i}^{1-\sigma}}{1-\sigma} \right] \right\}$$

przy warunkach ograniczających:

$$\forall_t \quad Y_t = C_t + I_t \quad (\text{ograniczenie zasobowe})$$

$$\forall_t \quad Y_t = K_t^\alpha \varepsilon_t \quad (\text{funkcja produkcji})$$

$$\forall_t \quad K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t \quad (\text{równanie ruchu kapitału})$$

Zadanie

Rozwiążmy to zadanie optymalizacyjne, a następnie znajdziemy taki poziom kapitału (i konsumpcji), który zgodnie z modelem nie zmienia się w czasie pod nieobecność wstrząsów, czyli dla $\varepsilon_t \equiv 1$.

Rozwiązanie (1)

Funkcja użyteczności, którą maksymalizuje rolnik:

$$\max_{C_t, K_{t+1}} U_t = \sum_{i=0}^{\infty} E_t \beta^i \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

przy warunkach (obowiązujących dla każdego okresu $\geq t$, zapisane przykładowo dla t):

$$\begin{cases} Y_t &= C_t + I_t \\ Y_t &= K_t^\alpha \varepsilon_t \\ K_{t+1} &= (1 - \delta) K_t + I_t \end{cases}$$

Rozwiązanie (2)

Z warunków ograniczających eliminujemy Y_t (potem będziemy mogli wyliczyć $\bar{Y}$ jako $\bar{C} + \bar{I}$ lub $\bar{K}^\alpha$):

$$\begin{cases} C_t + I_t = K_t^\alpha \varepsilon_t \\ I_t = K_{t+1} - (1 - \delta) K_t \end{cases}$$

Z warunków ograniczających eliminujemy I_t (potem będziemy mogli wyliczyć $\bar{I}$ jako $\bar{K}^\alpha - \bar{C}$ lub $\bar{K} - (1 - \delta) \bar{K}$):

$$K_{t+1} - (1 - \delta) K_t = K_t^\alpha \varepsilon_t - C_t$$

Rozwiązanie (3)

Ostatecznie mamy jeden warunek ograniczający ze względu na K i C :

$$C_t = K_t^\alpha \varepsilon_t - K_{t+1} + (1 - \delta) K_t$$

Funkcja Lagrange'a:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{\infty} E_t \beta^i \left[\frac{C_{t+i}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \lambda_{t+i} (-K_{t+i}^\alpha \varepsilon_{t+i} + K_{t+1+i} - (1 - \delta) K_{t+i} + C_{t+i}) \right]$$

Rozwiązanie (4)

Warunki 1. rzędu (znów zapisane dla przykładowego okresu t):

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial U_t}{\partial C_t} = C_t^{-\sigma} - \lambda_t = 0$$

• A zatem $\lambda_t = C_t^{-\sigma}$ oraz $E_t \lambda_{t+1} = E_t C_{t+1}^{-\sigma}$.

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial U_t}{\partial K_{t+1}} = -\lambda_t + E_t \lambda_{t+1} \beta (1 - \delta) + E_t \lambda_{t+1} \beta \alpha E_t K_{t+1}^{\alpha-1} \varepsilon_t = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial U_t}{\partial \lambda_t} = C_t + K_{t+1} - (1 - \delta) K_t - K_t^\alpha \varepsilon_t = 0$$

• Będziemy to traktować jak równanie definiujące konsumpcję, gdy rozwiążemy już model ze względu na kapitał.

Rozwiązanie (5)

Eliminujemy z równań (1) i (2) mnożnik Lagrange'a λ_t :

$$-C_t^{-\sigma} + E_t C_{t+1}^{-\sigma} \beta (1 - \delta) + E_t C_{t+1}^{-\sigma} \beta \alpha E_t K_{t+1}^{\alpha-1} \varepsilon_t = 0$$

Szukamy stanu ustalonego (*steady state*). Powinien to być wektor takich wartości zmiennych, które - przy braku wstrząsów (a tych w modelu nie mamy) - pozostają niezmiennie z okresu na okres.

Wiemy, że w stanie ustalonym wstrząsów brak, a więc dla każdego t mamy $\varepsilon_t \equiv 1$. Mamy 2 równania (powyższe oraz warunek 3) oraz 2 zmienne rozważane w różnych okresach ($\bar{C}$ i $\bar{K}$):

$$\begin{cases} -\bar{C}^{-\sigma} + \bar{C}^{-\sigma} \beta (1 - \delta) + \bar{C}^{-\sigma} \beta \alpha \bar{K}^{\alpha-1} = 0 \\ \bar{C} + \bar{K} - (1 - \delta) \bar{K} - \bar{K}^{\alpha} = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie (6)

$$\begin{cases} \bar{C}^{-\sigma} (-1 + \beta(1 - \delta) + \beta\alpha\bar{K}^{\alpha-1}) = 0 \\ \bar{C} = -\bar{K} + (1 - \delta)\bar{K} + \bar{K}^{\alpha} = \bar{K}^{\alpha} - \delta\bar{K} \end{cases}$$

$$(\bar{K}^{\alpha} - \delta\bar{K})^{-\sigma} \underbrace{(-1 + \beta(1 - \delta) + \beta\alpha\bar{K}^{\alpha-1})}_{=0} = 0$$

$$\bar{K} = \left[\frac{1 - \beta(1 - \delta)}{\beta\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Wartość kapitału w stanie ustalonym

$$\bar{K} = \left(\frac{1 - \beta(1 - \delta)}{\beta\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha - 1}}$$

- W tym przypadku stan ustalony jest funkcją parametrów modelu.
- W niektórych modelach jest jednak zadany egzogenicznie lub nie ma znaczenia dla analizy.
 - Np. w modelowaniu polityki pieniężnej istotne są wahania wokół długookresowego poziomu produkcji, zaś ten poziom pozostaje na drugim planie analizy.
 - Czasami kalibrujemy (ustalamy) tzw. *steady-state ratios*, czyli wzajemne relacje między zmiennymi w stanie równowagi długookresowej (a nie poszczególne zmienne). Przykłady: udział konsumpcji, inwestycji i wydatków rządowych w PKB.

Plan prezentacji

- 1 Praca z modelami DSGE
- 2 Stan ustalony
- 3 Log-linearyzacja**
- 4 Zadania

Szereg Taylora

http://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

$$\begin{aligned}
 f(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\bar{X})}{n!} (X - \bar{X})^n = \\
 &= f(\bar{X}) + f'(\bar{X}) (X - \bar{X}) + \frac{f''(\bar{X})}{2} (X - \bar{X})^2 + \dots = \\
 &\simeq f(\bar{X}) + f'(\bar{X}) (X - \bar{X})
 \end{aligned}$$

Linearyzacja:

$$f(X) \simeq f(\bar{X}) + f'(\bar{X}) (X - \bar{X})$$

$$f(X) \simeq f(\bar{X}) + \underbrace{\bar{X} f'(\bar{X})}_{\hat{x}} \frac{(X - \bar{X})}{\bar{X}}$$

$\hat{x}$ – procentowe odchylenie od stanu ustalonego. Odpowiada ono w przybliżeniu (również 1. rzędu) różnicy logarytmów naturalnych: bieżącego poziomu zmiennej oraz jej stanu ustalonego.

Dlatego powyższy zabieg nazywamy **log-linearyzacją**.

Log-linearyzacja

$$f(X) \simeq f(\bar{X}) + \bar{X} \cdot f'(\bar{X}) \cdot \hat{x}$$

$\hat{x}$ – zmienna wyrażona jako punkty procentowe odchylenia od wartości w *steady-state*

$\bar{X}$ – wartość w *steady-state*

$f(X)$ – lewa albo prawa strona równania

Jeżeli mamy wiele zmiennych w równaniu, $\mathbf{X}$ oznacza wektor zmiennych występujących w pewnej zależności, $\bar{\mathbf{X}}$ – wektor ich wartości w stanie ustalonym, X_i to i -ta zmienna w tym wektorze, a x_i – jej logarytmiczne odchylenie od wartości długookresowej:

$$f(\mathbf{X}) \simeq f(\bar{\mathbf{X}}) + \sum_i \bar{X}_i \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial X_i} \Big|_{\bar{\mathbf{X}}} \hat{x}_i$$

Plan prezentacji

- 1 Praca z modelami DSGE
- 2 Stan ustalony
- 3 Log-linearyzacja
- 4 Zadania**

Zadania

Dokonaj log-linearyzacji następujących równań:

$$① Y_t = a_0 N_t^{a_1} K_t^{a_2}$$

$$② Y_{N,t} = \kappa X_t^{(1-\kappa)\delta} C_t$$

$$③ \frac{W_t}{P_t} = \frac{C_t^\sigma N_t^\phi}{\varepsilon_t}$$

$$④ \varepsilon_t (C_t)^{-\sigma} = \varepsilon_t^* (C_t^*)^{-\sigma^*} Q_t$$

$$⑤ Q_{t,t+1} = \beta E_t \left[\frac{\varepsilon_{t+1}}{\varepsilon_t} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \right]$$

(oznacz $i_t = -\ln Q_{t,t+1}$ oraz $\bar{Q}_{t,t+1} = \beta$; oznacz później

$E_t \pi_{t+1} = E_t p_{t+1} - p_t$; załóż też, że $E_t x_t = x_t$)

$$⑥ \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon} = \theta + (1-\theta) \left(\frac{\tilde{P}_t}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon}$$

(potraktuj P_t , P_{t-1} i $\tilde{P}_t$ jako różne zmienne, ale o tym samym

stanie ustalonym $\bar{P}$; oznacz później $\pi_t = \hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}$)

Zadania

Dokonaj log-linearyzacji następujących równań:

❶ $Y_t = a_0 N_t^{a_1} K_t^{a_2}$

❷ $Y_{N,t} = \kappa X_t^{(1-\kappa)\delta} C_t$

❸ $\frac{W_t}{P_t} = \frac{C_t^\sigma N_t^\phi}{\varepsilon_t}$

❹ $\varepsilon_t (C_t)^{-\sigma} = \varepsilon_t^* (C_t^*)^{-\sigma^*} Q_t$

❺ $Q_{t,t+1} = \beta E_t \left[\frac{\varepsilon_{t+1}}{\varepsilon_t} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \right]$

(oznacz $i_t = -\ln Q_{t,t+1}$ oraz $\bar{Q}_{t,t+1} = \beta$; oznacz później

$E_t \pi_{t+1} = E_t p_{t+1} - p_t$; załóż też, że $E_t x_t = x_t$)

❻ $\left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon} = \theta + (1-\theta) \left(\frac{\tilde{P}_t}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon}$

(potraktuj P_t , P_{t-1} i $\tilde{P}_t$ jako różne zmienne, ale o tym samym

stanie ustalonym $\bar{P}$; oznacz później $\pi_t = \hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}$)

Zadania

Dokonaj log-linearyzacji następujących równań:

$$① \quad Y_t = a_0 N_t^{a_1} K_t^{a_2}$$

$$② \quad Y_{N,t} = \kappa X_t^{(1-\kappa)\delta} C_t$$

$$③ \quad \frac{W_t}{P_t} = \frac{C_t^\sigma N_t^\phi}{\varepsilon_t}$$

$$④ \quad \varepsilon_t (C_t)^{-\sigma} = \varepsilon_t^* (C_t^*)^{-\sigma^*} Q_t$$

$$⑤ \quad Q_{t,t+1} = \beta E_t \left[\frac{\varepsilon_{t+1}}{\varepsilon_t} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \right]$$

(oznacz $i_t = -\ln Q_{t,t+1}$ oraz $\bar{Q}_{t,t+1} = \beta$; oznacz później $E_t \pi_{t+1} = E_t p_{t+1} - p_t$; załóż też, że $E_t x_t = x_t$)

$$⑥ \quad \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon} = \theta + (1-\theta) \left(\frac{\tilde{P}_t}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon}$$

(potraktuj P_t , P_{t-1} i $\tilde{P}_t$ jako różne zmienne, ale o tym samym stanie ustalonym $\bar{P}$; oznacz później $\pi_t = \hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}$)

Zadania

Dokonaj log-linearyzacji następujących równań:

$$① \quad Y_t = a_0 N_t^{a_1} K_t^{a_2}$$

$$② \quad Y_{N,t} = \kappa X_t^{(1-\kappa)\delta} C_t$$

$$③ \quad \frac{W_t}{P_t} = \frac{C_t^\sigma N_t^\phi}{\varepsilon_t}$$

$$④ \quad \varepsilon_t (C_t)^{-\sigma} = \varepsilon_t^* (C_t^*)^{-\sigma^*} Q_t$$

$$⑤ \quad Q_{t,t+1} = \beta E_t \left[\frac{\varepsilon_{t+1}}{\varepsilon_t} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \right]$$

(oznacz $i_t = -\ln Q_{t,t+1}$ oraz $\bar{Q}_{t,t+1} = \beta$; oznacz później

$E_t \pi_{t+1} = E_t p_{t+1} - p_t$; załóż też, że $E_t x_t = x_t$)

$$⑥ \quad \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon} = \theta + (1-\theta) \left(\frac{\tilde{P}_t}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon}$$

(potraktuj P_t , P_{t-1} i $\tilde{P}_t$ jako różne zmienne, ale o tym samym

stanie ustalonym $\bar{P}$; oznacz później $\pi_t = \hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}$)

Zadania

Dokonaj log-linearyzacji następujących równań:

$$① \quad Y_t = a_0 N_t^{a_1} K_t^{a_2}$$

$$② \quad Y_{N,t} = \kappa X_t^{(1-\kappa)\delta} C_t$$

$$③ \quad \frac{W_t}{P_t} = \frac{C_t^\sigma N_t^\phi}{\varepsilon_t}$$

$$④ \quad \varepsilon_t (C_t)^{-\sigma} = \varepsilon_t^* (C_t^*)^{-\sigma^*} Q_t$$

$$⑤ \quad Q_{t,t+1} = \beta E_t \left[\frac{\varepsilon_{t+1}}{\varepsilon_t} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \right]$$

(oznacz $i_t = -\ln Q_{t,t+1}$ oraz $\bar{Q}_{t,t+1} = \beta$; oznacz później

$E_t \pi_{t+1} = E_t p_{t+1} - p_t$; załóż też, że $E_t x_t = x_t$)

$$⑥ \quad \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon} = \theta + (1-\theta) \left(\frac{\tilde{P}_t}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon}$$

(potraktuj P_t , P_{t-1} i $\tilde{P}_t$ jako różne zmienne, ale o tym samym

stanie ustalonym $\bar{P}$; oznacz później $\pi_t = \hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}$)

Zadania

Dokonaj log-linearyzacji następujących równań:

$$① \quad Y_t = a_0 N_t^{a_1} K_t^{a_2}$$

$$② \quad Y_{N,t} = \kappa X_t^{(1-\kappa)\delta} C_t$$

$$③ \quad \frac{W_t}{P_t} = \frac{C_t^\sigma N_t^\phi}{\varepsilon_t}$$

$$④ \quad \varepsilon_t (C_t)^{-\sigma} = \varepsilon_t^* (C_t^*)^{-\sigma^*} Q_t$$

$$⑤ \quad Q_{t,t+1} = \beta E_t \left[\frac{\varepsilon_{t+1}}{\varepsilon_t} \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma} \left(\frac{P_t}{P_{t+1}} \right) \right]$$

(oznacz $i_t = -\ln Q_{t,t+1}$ oraz $\bar{Q}_{t,t+1} = \beta$; oznacz później

$E_t \pi_{t+1} = E_t p_{t+1} - p_t$; załóż też, że $E_t x_t = x_t$)

$$⑥ \quad \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon} = \theta + (1-\theta) \left(\frac{\tilde{P}_t}{P_{t-1}} \right)^{1-\varepsilon}$$

(potraktuj P_t , P_{t-1} i $\tilde{P}_t$ jako różne zmienne, ale o tym samym stanie ustalonym $\bar{P}$; oznacz później $\pi_t = \hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}$)

Zadania

- 7. $P_{T,t} = \left[(1 - \alpha) (P_{H,t})^{1-\eta} + \alpha (P_{F,t})^{1-\eta} \right]^{\frac{1}{1-\eta}}$
(oznacz później $\hat{\pi}_t^T = \ln(P_t^T) - \ln(P_{t-1}^T)$ i podobnie dla indeksów górnych H i F)
- 8. $\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left[\frac{P_{f,t}}{P_{t-1}} - \frac{\kappa}{\kappa-1} MC_{t+k|t} \frac{P_{t+k}}{P_{t-1}} \right] \right\} = 0$
(wskazówka: mamy tu 5 różnych zmiennych dla jednego składnika, tylko 4 z nich zależą od indeksu sumowania k ; stały i równy jest poziom P i P_f ; dodatkowo zachodzi $Q_{t,t+k} = \beta^k$)

Zadania

- 7. $P_{T,t} = \left[(1 - \alpha) (P_{H,t})^{1-\eta} + \alpha (P_{F,t})^{1-\eta} \right]^{\frac{1}{1-\eta}}$
(oznacz później $\hat{\pi}_t^T = \ln(P_t^T) - \ln(P_{t-1}^T)$ i podobnie dla indeksów górnych H i F)
- 8. $\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k E_t \left\{ Q_{t,t+k} Y_{t+k|t} \left[\frac{P_{f,t}}{P_{t-1}} - \frac{\kappa}{\kappa-1} MC_{t+k|t} \frac{P_{t+k}}{P_{t-1}} \right] \right\} = 0$
(wskazówka: mamy tu 5 różnych zmiennych dla jednego składnika, tylko 4 z nich zależą od indeksu sumowania k ; stały i równy jest poziom P i P_f ; dodatkowo zachodzi $Q_{t,t+k} = \beta^k$)

Rozwiązania zadań (1)

Ad. 1. $y_t = a_1 n_t + a_2 k_t$

Ad. 2. $y_{N,t} = (1 - \kappa) \delta x_t + c_t$

Ad. 3. $w_t - p_t = \sigma c_t + \phi n_t - \epsilon_t^d$, gdzie $\epsilon_t^d = \ln(\epsilon_t^D)$ i $\bar{\epsilon}^D = 0$

Ad. 4. $\epsilon_t^D - \sigma c_t = \epsilon_t^{D*} - \sigma^* c_t^* + q_t$

Ad. 5.

$$c_t = E_t c_{t+1} - \frac{1}{\sigma} [i_t - (E_t p_{t+1} - p_t) + \ln \beta] + \frac{1}{\sigma} (\epsilon_t^d - E_t \epsilon_{t+1}^d)$$

Ad. 8. pełne rozwiązanie przy okazji tematu 5

Rozwiązania zadań (2)

rozwiązujemy w okolicy bezinflacyjnego stanu ustalonego, w którym $P_t = P_{t-1} = \bar{P}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{P}}{\bar{P}}\right)^{1-\varepsilon} + \bar{P}(1-\varepsilon)\left(\frac{\bar{P}}{\bar{P}}\right)^{-\varepsilon} \frac{1}{\bar{P}} \hat{p}_t - \bar{P}(1-\varepsilon)\left(\frac{\bar{P}}{\bar{P}}\right)^{-\varepsilon} \frac{\bar{P}}{\bar{P}^2} \hat{p}_{t-1} &= \\ \theta + (1-\theta)\left(\frac{\bar{P}}{\bar{P}}\right)^{1-\varepsilon} + \bar{P}(1-\theta)(1-\varepsilon)\left(\frac{\bar{P}}{\bar{P}}\right)^{-\varepsilon} \frac{1}{\bar{P}} \hat{\hat{p}}_t - & \\ \bar{P}(1-\theta)(1-\varepsilon)\left(\frac{\bar{P}}{\bar{P}}\right)^{-\varepsilon} \frac{\bar{P}}{\bar{P}^2} \hat{p}_{t-1} & \end{aligned}$$

zauważamy, że elementy zapisane na czerwono to równanie zapisane w steady state (redukcja)

obie strony mają wspólny mnożnik $\bar{P}(1-\varepsilon)\left(\frac{\bar{P}}{\bar{P}}\right)^{-\varepsilon} \frac{1}{\bar{P}}$, po jego skróceniu i zdefiniowaniu $\pi_t = \hat{p}_t - \hat{p}_{t-1}$ otrzymujemy rozwiązanie:

$$\pi_t = (1-\theta)(\hat{\hat{p}}_t - \hat{p}_{t-1})$$

Ad.6.

Rozwiązania zadań (3)

$$\begin{aligned} \bar{P}_{T,t} + \bar{P}_T \hat{P}_{T,t} &= \left[(1-\alpha) \bar{P}_H^{1-\eta} + \alpha \bar{P}_F^{1-\eta} \right]^{\frac{1}{1-\eta}} + \\ & \bar{P}_H^{\frac{1}{1-\eta}} \left[(1-\alpha) \bar{P}_H^{1-\eta} + \alpha \bar{P}_F^{1-\eta} \right]^{\frac{1-(1-\eta)}{1-\eta}} (1-\alpha) (1-\eta) \bar{P}_H^{-\eta} \hat{P}_{H,t} + \\ & \bar{P}_F^{\frac{1}{1-\eta}} \left[(1-\alpha) \bar{P}_H^{1-\eta} + \alpha \bar{P}_F^{1-\eta} \right]^{\frac{1-(1-\eta)}{1-\eta}} \alpha (1-\eta) \bar{P}_F^{-\eta} \hat{P}_{F,t} \end{aligned}$$

zauważamy, że elementy zapisane na czerwono to równanie zapisane w steady state (redukcja)

upraszczamy:

$$\bar{P}_T \hat{P}_{T,t} = \bar{P}_H \left[(1-\alpha) \bar{P}_H^{1-\eta} + \alpha \bar{P}_F^{1-\eta} \right]^{\frac{1-(1-\eta)}{1-\eta}} (1-\alpha) \bar{P}_H^{-\eta} \hat{P}_{H,t} + \bar{P}_F \left[(1-\alpha) \bar{P}_H^{1-\eta} + \alpha \bar{P}_F^{1-\eta} \right]^{\frac{1-(1-\eta)}{1-\eta}} \alpha \bar{P}_F^{-\eta} \hat{P}_{F,t}$$

dzielimy stronami przez równanie dla steady state:

$$\hat{P}_{T,t} = \bar{P}_H \left[(1-\alpha) \bar{P}_H^{1-\eta} + \alpha \bar{P}_F^{1-\eta} \right]^{-1} (1-\alpha) \bar{P}_H^{-\eta} \hat{P}_{H,t} + \bar{P}_F \left[(1-\alpha) \bar{P}_H^{1-\eta} + \alpha \bar{P}_F^{1-\eta} \right]^{-1} \alpha \bar{P}_F^{-\eta} \hat{P}_{F,t}$$

$$\hat{P}_{T,t} = \frac{(1-\alpha) \bar{P}_H^{1-\eta}}{(1-\alpha) \bar{P}_H^{1-\eta} + \alpha \bar{P}_F^{1-\eta}} \hat{P}_{H,t} + \frac{\alpha \bar{P}_F^{1-\eta}}{(1-\alpha) \bar{P}_H^{1-\eta} + \alpha \bar{P}_F^{1-\eta}} \hat{P}_{F,t}$$

to rozwiązanie w formie przyrostów (dla $\pi_{T,t}$, $\pi_{H,t}$, $\pi_{F,t}$) bez dodatkowych założeń ekonomicznych

Równanie definiuje indeks cen w sektorze tradables jako agregat cen dóbr krajowych (H) i zagranicznych (F), gdzie η to elastyczność substytucji, a α - udział dóbr zagranicznych w koszyku tradables krajowego konsumenta w stanie ustalonym. Log-linearyzacja przebiega zwykle wokół steady state, w którym obowiązuje prawo jednej ceny, tzn. $\bar{P}_T = \bar{P}_H = \bar{P}_F$. Takie założenie pozwala na dalsze uproszczenie do postaci:

$$\hat{P}_{T,t} = (1-\alpha) \hat{P}_{H,t} + \alpha \hat{P}_{F,t}$$

a po odjęciu analogicznego równania dla okresu $t-1$:

$$\pi_{T,t} = (1-\alpha) \pi_{H,t} + \alpha \pi_{F,t}$$

Ad.7.