

Modele wielorównaniowe. Estymacja parametrów

Ekonometria Szeregów Czasowych – SGH

Andrzej Torój

Plan wykładu

- 1 Pośrednia MNK
- 2 Metoda zmiennych instrumentalnych
- 3 Podwójna MNK
- 4 Estymatory klasy k
- 5 Potrójna MNK
- 6 Metoda równań pozornie niepowiązanych
- 7 MNW z pełną informacją (FIML)

Prezentacja dostępna pod adresem

<http://web.sgh.waw.pl/~atoroj/>

Przykład (1)

$$\begin{cases} y_{1t} = \underbrace{\alpha_0 + \alpha_1 y_{2t} + \alpha_2 x_{1t}}_{\hat{y}_{1t}} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \underbrace{\beta_0 + \beta_1 y_{1t} + \beta_2 x_{2t}}_{\hat{y}_{2t}} + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

$$y_{2t} = \beta_0 + \beta_1 (\hat{y}_{1t} + \varepsilon_{1t}) + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_{2t} \equiv a_t + \beta_1 \varepsilon_{1t}$$

$$y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 (a_t + \beta_1 \varepsilon_{1t}) + \alpha_2 x_{1t} + \varepsilon_{1t}$$

Wniosek: w modelach o równaniach łącznie współzależnych endogeniczne regresory skorelowane ze składnikiem losowym.

Czy to problem?

Twierdzenie Gaussa-Markowa: przypomnienie

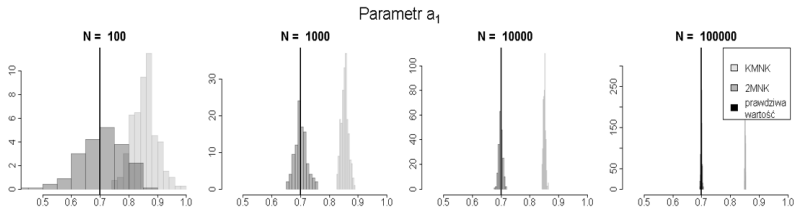
- Estymator KMNK: $\beta^{KMNK} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ jest nieobciążony, gdy jego wartość oczekiwana jest równa prawdziwej (zwykle nieznannej ekonometrykowi, ale nielosowej) wartości parametru w procesie generującym dane: $E(\beta^{KMNK}) = \beta$.

$$\begin{aligned} E(\beta^{KMNK}) &= E\left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}\right] = E\left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{X}\beta + \epsilon)\right] = \\ &= E\left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \beta + (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \epsilon\right] \\ &= \beta + E\left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \epsilon\right] \end{aligned}$$

- Ewentualne obciążenie (drugi składnik) zeruje się, gdy $E(\mathbf{X}^T \epsilon) = 0$. Tak nie jest, gdy regresor z macierzy $\mathbf{X}$ jest skorelowany ze składnikiem losowym.
- Skutkiem jest obciążenie estymatora KMNK i jego niezgodność (wariancja estymatora zawęża się, ale nie wokół prawdziwej wartości parametru).

Przykład (2)

Rozważmy proces generujący dane jak w dwurównaniowym przykładzie, z $\alpha_1 = 0.7$ i pewnymi innymi, przykładowymi wartościami parametrów (pełen kod **tutaj**):



Plan prezentacji

- 1 Pośrednia MNK
- 2 Metoda zmiennych instrumentalnych
- 3 Podwójna MNK
- 4 Estymatory klasy k
- 5 Potrójna MNK
- 6 Metoda równań pozornie niepowiązanych
- 7 MNW z pełną informacją (FIML)

PMNK – notacja

$\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_j$ – macierz zmiennych **egzogenicznych** modelu nie występujących w j -tym równaniu (obserwacje w wierszach, zmienne w kolumnach).

$\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_j$ – macierz zmiennych **endogenicznych** modelu nie występujących w j -tym równaniu (obserwacje w wierszach, zmienne w kolumnach).

Równanie można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} y_{j,t} & \tilde{y}_{j,t} & \tilde{\tilde{y}}_{j,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{A}}_{[:j]} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{j,t} & \tilde{\tilde{x}}_{j,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{B}}_{[:j]} \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_{j,t}$$

PMNK (1)

Zgodna estymacja (wielowymiarową) MNK parametrów postaci zredukowanej całego systemu:

$$\hat{\mathbf{y}}_t = \mathbf{x}_t \hat{\boldsymbol{\Pi}} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\Pi}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

Z zależności między parametrami postaci zredukowanej i strukturalnej ($\boldsymbol{\Pi} = -\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$, $\boldsymbol{\Pi}\mathbf{A} = -\mathbf{B}$) dla j -tego równania ($\boldsymbol{\Pi}\mathbf{A}_{[:,j]} = -\mathbf{B}_{[:,j]}$):

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{A}}_{[:,j]} \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{\Pi}} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{A}}_{[:,j]} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{B}}_{[:,j]} \\ 0 \end{bmatrix}$$

PMNK (2)

Bierzemy pod uwagę skrajne strony równania i mnożymy lewostronnie przez $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})$:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Y} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{A}}_{[:,j]} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{B}}_{[:,j]} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozbijamy macierze $\mathbf{Y}$ na 3 bloki oraz $\mathbf{X}$ na 2 bloki kolumnowe, stosownie do wektorów, przez które są mnożone prawostronnie:

$$\mathbf{X}^T \begin{bmatrix} \mathbf{y}_j & \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{A}}_{[:,j]} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{X}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_j & \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{B}}_{[:,j]} \\ 0 \end{bmatrix}$$

PMNK (3)

Po mnożeniu i grupowaniu wyrazów:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{y}_j = \mathbf{X}^T \left(-\tilde{\mathbf{Y}}_j \tilde{\mathbf{A}}_{[:,j]} - \tilde{\mathbf{X}}_j \tilde{\mathbf{B}}_{[:,j]} \right) \equiv \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{Z}}_j \tilde{\mathbf{F}}_j$$

Gdy macierz $\mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{Z}}_j$ o wymiarach $K \times (\tilde{M}_j + \tilde{K}_j)$ kwadratowa (czyli gdy $K = \tilde{M}_j + \tilde{K}_j$ – jednoznaczna identyfikowalność równania j) i nieosobliwa, wówczas możemy rozwiązać równanie ze względu na $\tilde{\mathbf{F}}_j$, otrzymując estymator PMNK:

$$\hat{\mathbf{F}}_j^{\text{PMNK}} = \left(\mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{Z}}_j \right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}_j$$

Plan prezentacji

- 1 Pośrednia MNK
- 2 Metoda zmiennych instrumentalnych**
- 3 Podwójna MNK
- 4 Estymatory klasy k
- 5 Potrójna MNK
- 6 Metoda równań pozornie niepowiązanych
- 7 MNW z pełną informacją (FIML)

Zmienne instrumentalne

W_j – macierz zmiennych instrumentalnych dla równania j :

- egzogeniczne;
- nieskorelowane ze składnikiem losowym ε_j ;
- skorelowane ze zmiennymi objaśniającymi $\tilde{Z}_j$;
- jest ich tyle ile zmiennych objaśniających, tzn. $\tilde{M}_j + \tilde{K}_j$.

MZI

$$\mathbf{w}_j^T \mathbf{y}_j = \mathbf{w}_j^T \tilde{\mathbf{Z}}_j \tilde{\mathbf{f}}_j + \underbrace{\mathbf{w}_j^T \varepsilon_j}_0$$

$$\hat{\mathbf{f}}_j^{\text{MZI}} = \left(\mathbf{w}_j^T \tilde{\mathbf{Z}}_j \right)^{-1} \mathbf{w}_j^T \mathbf{y}_j$$

Przy jednoznacznie identyfikowalnym równaniu j i $\mathbf{W}_j$ - zmiennych z góry ustalonych występujących w systemie, $\hat{\mathbf{f}}_j^{\text{MZI}} = \hat{\mathbf{f}}_j^{\text{PMNK}}$.

A jeżeli instrumentów jest więcej?

Wówczas ich macierz jest transformowana do macierzy o niższych wymiarach za pomocą odpowiedniej macierzy wag. Takie postępowanie nazywamy Uogólnioną Metodą Momentów (ang. *Generalized Method of Moments*, GMM). *Vide literatura.*

Plan prezentacji

- 1 Pośrednia MNK
- 2 Metoda zmiennych instrumentalnych
- 3 Podwójna MNK**
- 4 Estymatory klasy k
- 5 Potrójna MNK
- 6 Metoda równań pozornie niepowiązanych
- 7 MNW z pełną informacją (FIML)

Otrzymanie wartości teoretycznych zmiennych endogenicznych j -tego równania modelu

2MNK – krok 1

- Dla każdej ze zmiennych endogenicznych w równaniu j – równanie w formie zredukowanej:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{j,t} = \mathbf{X}_t \mathbf{D} + \mathbf{v}_{j,t} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_{j,t} & \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_{j,t} \end{bmatrix} \mathbf{D} + \mathbf{v}_{j,t}$$

- Estymacja KMNK (zgodna) parametrów takiego systemu:

$$\hat{\mathbf{D}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{Y}}_j = \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_j & \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_j \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_j & \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_j \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_j & \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_j \end{bmatrix}^T \tilde{\mathbf{Y}}_j$$

- Na podstawie $\hat{\mathbf{D}}$ – wartości teoretyczne $\tilde{\mathbf{y}}_{j,t}$:

$$\hat{\mathbf{y}}_{j,t} = \mathbf{X}_t \hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_{j,t} & \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_{j,t} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}$$

2MNK – krok 2 (1)

Dla równania

$$y_{j,t} = \tilde{\mathbf{Y}}_{j,t} \tilde{\mathbf{A}}_{[:j]} + \tilde{\mathbf{X}}_{j,t} \tilde{\mathbf{B}}_{[:j]} + \varepsilon_{j,t}$$

estymator KMNK:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_j^{\text{KMNK}} &= \begin{bmatrix} \hat{\tilde{\mathbf{A}}}_{[:j]} \\ \hat{\tilde{\mathbf{B}}}_{[:j]} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}^T \mathbf{y}_j = \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \mathbf{y}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \mathbf{y}_j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2MNK – krok 2 (2)

Wartości zaobserwowane $\tilde{y}_j$ zastępujemy wartościami teoretycznymi z kroku 1, usuwając problem endogeniczności:

$$\hat{F}_j^{2MNK} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j^T \hat{\mathbf{Y}}_j & \hat{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \hat{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j^T \mathbf{y}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \mathbf{y}_j \end{bmatrix} \quad (1)$$

Cechy estymatora 2MNK

- zgodny przy endogenicznych regresorach;
- odporny na współliniowość zmiennych objaśniających i błędy specyfikacji;
- kłopotliwy w przypadku dużych modeli (wymaga wówczas dużych prób).

2MNK – własności

Zauważmy następujące zależności:

$$\textcircled{1} \quad \tilde{\mathbf{X}}_j^T \hat{\mathbf{Y}}_j = \tilde{\mathbf{X}}_j^T (\tilde{\mathbf{Y}}_j - \hat{\mathbf{v}}_j) = \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j - \underbrace{\tilde{\mathbf{X}}_j^T \hat{\mathbf{v}}_j}_0$$

$$\textcircled{2} \quad \hat{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j = (\tilde{\mathbf{Y}}_j - \hat{\mathbf{v}}_j)^T \tilde{\mathbf{X}}_j = \underbrace{\hat{\mathbf{v}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j}_0 + \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j$$

$$\textcircled{3} \quad \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j = (\hat{\mathbf{Y}}_j + \hat{\mathbf{v}}_j)^T (\hat{\mathbf{Y}}_j + \hat{\mathbf{v}}_j) = \hat{\mathbf{Y}}_j^T \hat{\mathbf{Y}}_j + \underbrace{\hat{\mathbf{Y}}_j^T \hat{\mathbf{v}}_j + \hat{\mathbf{v}}_j^T \hat{\mathbf{Y}}_j}_0 + \hat{\mathbf{v}}_j^T \hat{\mathbf{v}}_j$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j - \hat{\mathbf{v}}_j^T \hat{\mathbf{v}}_j &= (\hat{\mathbf{Y}}_j + \hat{\mathbf{v}}_j)^T \tilde{\mathbf{Y}}_j - \hat{\mathbf{v}}_j^T \hat{\mathbf{v}}_j + \underbrace{\hat{\mathbf{v}}_j^T \hat{\mathbf{Y}}_j}_0 = \\ &= (\hat{\mathbf{Y}}_j + \hat{\mathbf{v}}_j)^T \tilde{\mathbf{Y}}_j - \underbrace{\hat{\mathbf{v}}_j^T (\hat{\mathbf{v}}_j + \hat{\mathbf{Y}}_j)}_{\tilde{\mathbf{Y}}_j} = (\hat{\mathbf{Y}}_j + \hat{\mathbf{v}}_j - \hat{\mathbf{v}}_j)^T \tilde{\mathbf{Y}}_j = \hat{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \quad \hat{\mathbf{Y}}_j = \mathbf{X} \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{Y}}_j$$

Alternatywny wzór (1)

Podstawiamy do (1) zależność 3+4 i 5:

$$\hat{\mathbf{F}}_j^{2\text{MNK}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j^T \mathbf{y}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \mathbf{y}_j \end{bmatrix} = \quad (2)$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{Y}}_j \right)^T \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{Y}}_j \right)^T \mathbf{y}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \mathbf{y}_j \end{bmatrix}$$

WNIOSEK: formuła obliczeniowa sprowadzona do jednego kroku.

Alternatywny wzór (2)

Podstawiamy do wzoru (1) na estymator 2MNK, wykorzystując formułę (2) oraz zależność 2:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_j^{2\text{MNK}} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j & \hat{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j^T \mathbf{y}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \mathbf{y}_j \end{bmatrix} = \\ &= \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}^T}_{\mathbf{W}_j^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{Z}}_j} \right)^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}^T}_{\mathbf{W}_j^T} \mathbf{y}_j \end{aligned} \quad (3)$$

Alternatywny wzór (2)

WNIOSEK:

Estymator 2MNK to szczególny przypadek estymatora MZI, w którym:

- instrumentami dla zmiennych endogenicznych są ich wartości teoretyczne z regresji w formie zredukowanej;
- zmienne egzogeniczne są instrumentami dla samych siebie.

2MNM – własności

Alternatywny wzór (3)

Możemy podstawić do wzoru (1) na estymator 2MNM zależności 1, 2 i 3, otrzymując równoważną postać:

$$\hat{\mathbf{F}}_j^{2MNM} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j - \hat{\mathbf{v}}_j^T \hat{\mathbf{v}}_j & \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{Y}}_j - \hat{\mathbf{v}}_j)^T \mathbf{y}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \mathbf{y}_j \end{bmatrix} \quad (4)$$

WNIOSEK: estymator KMNM i 2MNM można zapisać za pomocą wspólnego wzoru:

$$\hat{\mathbf{F}}_j^{KMNM/2MNM} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j - k \cdot \hat{\mathbf{v}}_j^T \hat{\mathbf{v}}_j & \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{Y}}_j - k \cdot \hat{\mathbf{v}}_j)^T \mathbf{y}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \mathbf{y}_j \end{bmatrix}$$

dla $k = 0$ – estymator KMNM

dla $k = 1$ – estymator 2MNM

Plan prezentacji

- 1 Pośrednia MNK
- 2 Metoda zmiennych instrumentalnych
- 3 Podwójna MNK
- 4 Estymatory klasy k**
- 5 Potrójna MNK
- 6 Metoda równań pozornie niepowiązanych
- 7 MNW z pełną informacją (FIML)

k-estymator (1)

$$\hat{\mathbf{F}}_j^k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j - k \cdot \hat{\mathbf{v}}_j^T \hat{\mathbf{v}}_j & \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{Y}}_j - k \cdot \hat{\mathbf{v}}_j)^T \mathbf{y}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \mathbf{y}_j \end{bmatrix}$$

dla $k \in (0; 1)$.

Rozważmy estymator MZI z macierzą instrumentów

$$\mathbf{W}_j = [\tilde{\mathbf{Y}}_j - k\hat{\mathbf{v}}_j \mid \tilde{\mathbf{X}}_j]:$$

k-estymator (2)

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{F}}_j^{\text{MZI}} &= (\mathbf{W}_j^T \tilde{\mathbf{Z}}_j)^{-1} \mathbf{W}_j^T \mathbf{y}_j = \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j - k \hat{\mathbf{v}}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_{j,t} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j - k \hat{\mathbf{v}}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix} \mathbf{y}_j = \\
&= \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{Y}}_j - k \cdot \hat{\mathbf{v}}_j)^T \underbrace{\tilde{\mathbf{Y}}_j}_{\hat{\mathbf{Y}}_j + \hat{\mathbf{v}}_j} & (\tilde{\mathbf{Y}}_j - k \cdot \hat{\mathbf{v}}_j)^T \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{Y}}_j - k \cdot \hat{\mathbf{v}}_j)^T \mathbf{y}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \mathbf{y}_j \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j - k \cdot \hat{\mathbf{v}}_j^T \hat{\mathbf{v}}_j & \tilde{\mathbf{Y}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{Y}}_j & \tilde{\mathbf{X}}_j^T \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{Y}}_j - k \cdot \hat{\mathbf{v}}_j)^T \mathbf{y}_j \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^T \mathbf{y}_j \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

WNIOSEK: estymator klasy k to szczególny przypadek estymatora MZI.

k-estymator

Zależności między estymatorami

	MZI	K	2MNK	PMNK	LIML
MZI	**	K to szczególny przypadek MZI (dobór instrumentów).	2MNK to szczególny przypadek MZI (dobór instrumentów).	PMNK to szczególny przypadek MZI (wynagł jednznacznej identyfikowalności i dobór instrumentów).	Przy jednznacznej identyfikowalności LIML to szczególny przypadek MZI (dobór instrumentów).
K	**	**	2MNK to szczególny przypadek K ($k = 1$)	Przy jednznacznej identyfikowalności i $k-1$ PMNK jako równoważny 2MNK to szczególny przypadek K.	Przy jednznacznej identyfikowalności i $k-1$ LIML jako równoważny 2MNK to szczególny przypadek K.
2MNK	**	**	**	Przy jednznacznej identyfikowalności równoważne; przy nadmiernej – istnieje tylko estymator 2MNK.	Przy jednznacznej identyfikowalności równoważne; przy nadmiernej – 2MNK dwustopniowa, LIML estymuje wszystko jednocześnie.
PMNK	**	**	**	**	Przy jednznacznej identyfikowalności równoważne; przy nadmiernej – istnieje tylko LIML.
LIML	**	**	**	**	**

Plan prezentacji

- 1 Pośrednia MNK
- 2 Metoda zmiennych instrumentalnych
- 3 Podwójna MNK
- 4 Estymatory klasy k
- 5 Potrójna MNK**
- 6 Metoda równań pozornie niepowiązanych
- 7 MNW z pełną informacją (FIML)

Idea 3MNK

- metody estymacji łącznej: 3MNK i FIML
 - jednoczesna estymacja parametrów całego modelu wielorównaniowego (w odróżnieniu od metod estymacji parametrów poszczególnych równań)
- dlaczego?
 - w procesie estymacji uwzględnione korelacje między składnikami losowymi poszczególnych równań (efektywność!)
 - możliwość nakładania restrykcji wiążących parametry różnych równań
- różnica między 2MNK a 3MNK analogiczna do KMNK i UMNK

Notacja

- Zapisujemy M -równaniowy model jako:

$$y_1 = \tilde{\mathbf{Z}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{F}}_1 + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \tilde{\mathbf{Z}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{F}}_2 + \varepsilon_2$$

$$\vdots$$

$$y_M = \tilde{\mathbf{Z}}_M \cdot \tilde{\mathbf{F}}_M + \varepsilon_M$$

gdzie $\tilde{\mathbf{Z}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_i & \tilde{\mathbf{X}}_i \end{bmatrix}$ – wektor zmiennych objaśniających (odpowiednio: endogenicznych i z góry ustalonych) w i -tym równaniu modelu.

- Zapisujemy cały model w jednym równaniu macierzowym:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{Z}}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\mathbf{Z}}_M \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{Z}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_M \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_M \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

przy czym $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ są wektorami pionowymi o wymiarach $T \times 1$

Kowariancje składników losowych

Niech: $\hat{\mathbf{f}}_j^{2MNK}$ – wektor oszacowań parametrów j -tego równania za pomocą 2MNK.
Znając ten wektor, możemy wyznaczyć:

- 1 wartości teoretyczne $\hat{\mathbf{y}}_j$
- 2 w konsekwencji: **reszty** j -tego równania: wektory $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \dots, \hat{\mathbf{e}}_M$.
- 3 w konsekwencji: **macierz wariancji-kowariancji reszt poszczególnych równań modelu** – czyli odpowiednio ułożone kowariancje dla każdej pary $\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j$
($i, j \in \{1, \dots, M\}$): $\hat{\Sigma} = [\hat{\sigma}_{ij}]$ (wymiar: $M \times M$)

Poszczególne elementy $\hat{\sigma}_{ij}$ wyznaczamy ze wzoru na nieobciążony estymator kowariancji:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \left(\mathbf{y}_i - \mathbf{Z}_i \hat{\mathbf{f}}_i^{2MNK} \right) \left(\mathbf{y}_j - \mathbf{Z}_j \hat{\mathbf{f}}_j^{2MNK} \right)^T / \nu$$

gdzie ν – liczba stopni swobody. Gdy wyznaczamy ją dla kowariancji dwóch równań, z których każde ma inną liczbę stopni swobody, optymalnie jest użyć średnie

geometrycznej: $\nu = \sqrt{\left(T - \tilde{M}_i - \tilde{K}_i \right) \left(T - \tilde{M}_j - \tilde{K}_j \right)}$ (oznaczenia jak w wykładzie nt. identyfikowalności).

Iloczyn Kroneckera

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{12} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ a_{21} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} & a_{22} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Można łatwo wykazać (polecam jako ćwiczenie), że:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$$

3MNK – krok 1

Krok 1. Estymacja w postaci zredukowanej (MNK) i obliczenie wartości teoretycznych dla równania j :

$$\hat{\tilde{\mathbf{z}}}_j = \mathbf{X} \boldsymbol{\Pi}_j = \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{z}}_j$$

Zauważmy, że $\tilde{\mathbf{z}}_j = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}_j & \tilde{\mathbf{x}}_j \end{bmatrix}$ i optymalne dopasowanie wymusza replikację drugiego bloku, tzn. $\hat{\tilde{\mathbf{z}}}_j = \begin{bmatrix} \hat{\tilde{\mathbf{y}}}_j & \tilde{\mathbf{x}}_j \end{bmatrix}$.

Macierzowo dla całego systemu:

$$\hat{\tilde{\mathbf{Z}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{z}}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{z}}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{z}}_m \end{bmatrix} = \left\{ \mathbf{I}_M \otimes \left[\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \right] \right\} \tilde{\mathbf{Z}}$$

3MNK – krok 2

Krok 2. Estymacja w postaci strukturalnej parametrów pojedynczych równań (2MNK)

Wartości z próby dla zmiennych objaśniających ($\tilde{\mathbf{Z}}$) w przypadku endogenicznych zmiennych objaśniających zamienione na wartości teoretyczne ($\hat{\tilde{\mathbf{Z}}}$):

$$\mathbf{f}^{2\text{MNK}} = \left(\hat{\tilde{\mathbf{Z}}}^T \hat{\tilde{\mathbf{Z}}} \right)^{-1} \hat{\tilde{\mathbf{Z}}}^T \mathbf{y}$$

3MNK – krok 3 (1)

Krok 3. Uwzględnienie jednoczesnych korelacji składników losowych w procesie estymacji.

Jeżeli składniki losowe poszczególnych równań ε_j są sferyczne, to każdy z nich wektor ma macierz wariancji-kowariancji $T \times T$

postaci
$$\begin{bmatrix} \sigma_{jj}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{jj}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{jj}^2 \end{bmatrix}.$$

Jaka jest macierz wariancji-kowariancji całego wektora ε ?

Trzy kroki

3MNK – krok 3 (2)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{11}^2 & & & \\ & \sigma_{11}^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{11}^2 & \\ \sigma_{12}^2 & \sigma_{12}^2 & & & \\ & \sigma_{12}^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{12}^2 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \sigma_{1m}^2 & \sigma_{1m}^2 & & & \\ & \sigma_{1m}^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{1m}^2 & \\ \sigma_{12}^2 & \sigma_{12}^2 & & & \\ & \sigma_{22}^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{22}^2 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \sigma_{2m}^2 & \sigma_{2m}^2 & & & \\ & \sigma_{2m}^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{2m}^2 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \sigma_{1m}^2 & \sigma_{1m}^2 & & & \\ & \sigma_{1m}^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{1m}^2 & \\ \sigma_{2m}^2 & \sigma_{2m}^2 & & & \\ & \sigma_{mm}^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{mm}^2 & \end{bmatrix}$$

Trzy kroki

Iloczyn Kroneckera w 3MNK

$$\begin{bmatrix}
 \sigma_{11}^2 & & & & \sigma_{12}^2 & & \dots & \sigma_{1m}^2 & & \\
 & \sigma_{11}^2 & & & & \sigma_{12}^2 & & & \sigma_{1m}^2 & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & \\
 & & & \sigma_{11}^2 & & & & \sigma_{12}^2 & & \sigma_{1m}^2 \\
 \sigma_{12}^2 & & & & \sigma_{22}^2 & & \dots & \sigma_{2m}^2 & & \\
 & \sigma_{12}^2 & & & & \sigma_{22}^2 & & & \sigma_{2m}^2 & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & \\
 & & & \sigma_{12}^2 & & & & \sigma_{22}^2 & & \sigma_{2m}^2 \\
 \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\
 \sigma_{1m}^2 & & & & \sigma_{2m}^2 & & \dots & \sigma_{mm}^2 & & \\
 & \sigma_{1m}^2 & & & & \sigma_{2m}^2 & & & \sigma_{mm}^2 & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & \\
 & & & \sigma_{1m}^2 & & & & \sigma_{2m}^2 & & \sigma_{mm}^2
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{1m}^2 \\
 \sigma_{12}^2 & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2m}^2 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \sigma_{1m}^2 & \sigma_{2m}^2 & \dots & \sigma_{mm}^2
 \end{bmatrix}
 \otimes
 \begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1
 \end{bmatrix}_{T \times T}
 = \Sigma \otimes I_T$$

Ostateczny wzór 3MNK (1)

Jeżeli znamy macierz wariancji-kowariancji całego wektora składników losowych po oszacowaniu $\hat{\Sigma}$, to możemy zastosować UMNK w odniesieniu do modelu $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{Z}}\tilde{\mathbf{F}} + \varepsilon$, $\varepsilon \sim (\mathbf{0}, \mathbf{\Omega})$.

$$\hat{\mathbf{F}}^{\text{UMNK}} = \left(\tilde{\mathbf{Z}}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \tilde{\mathbf{Z}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{y}$$

Przy jednoczesnym zastosowaniu 2MNK zastępujemy w powyższym wzorze $\tilde{\mathbf{Z}}$ wartościami teoretycznymi z kroku 1:

$$\hat{\mathbf{F}}^{\text{UMNK}} = \left(\hat{\tilde{\mathbf{Z}}}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \hat{\tilde{\mathbf{Z}}} \right)^{-1} \hat{\tilde{\mathbf{Z}}}^T \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{y}$$

Ostateczny wzór 3MNK (2)

Skoro $\hat{\Omega} = \hat{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_T$ oraz $\hat{\mathbf{Z}} = \left\{ \mathbf{I}_m \otimes \left[\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \right] \right\} \mathbf{Z}$, to:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}^{3MNK} = & \left[\mathbf{Z}^T \left\{ \mathbf{I}_m \otimes \left[\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \right] \right\}^T \left(\hat{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_T \right)^{-1} \left\{ \mathbf{I}_m \otimes \left[\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \right] \right\} \mathbf{Z} \right]^{-1} \cdot \\ & \cdot \mathbf{Z}^T \left\{ \mathbf{I}_m \otimes \left[\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \right] \right\}^T \left(\hat{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_T \right)^{-1} \mathbf{y} \end{aligned}$$

Z własności iloczynu Kroneckera:

$$\hat{\mathbf{F}}^{3MNK} = \left[\mathbf{Z}^T \left\{ \hat{\Sigma}^{-1} \otimes \left[\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \right] \right\} \mathbf{Z} \right]^{-1} \mathbf{Z}^T \left\{ \hat{\Sigma}^{-1} \otimes \left[\mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \right] \right\} \mathbf{y}$$

3MNK: iteracyjna procedura

- Na mocy tego wzoru, $\hat{F}^{3MNK}$ zależy od $\hat{\Sigma}$.
 - $\hat{\Sigma}$ zostało wcześniej wyznaczone warunkowo względem $\hat{F}^{2MNK}$.
 - **[PROCEDURA JEDNOKROKOWA]**
- Można zatem wyznaczyć $\hat{\Sigma}$ ponownie (powiedzmy: $\hat{\Sigma}^{(1)}$), tym razem warunkowo względem $\hat{F}^{3MNK}$.
 - ...i wówczas, posługując się nowym $\hat{\Sigma}^{(1)}$, zaktualizować później wartość $\hat{F}^{3MNK}$ (powiedzmy: $\hat{F}^{3MNK(1)}$).
 - **[PROCEDURA DWUKROKOWA lub JEDNORAZOWA AKTUALIZACJA]**
- Można jednak wyznaczać kolejno:
 $\hat{\Sigma}^{(2)}$, $\hat{F}^{3MNK(2)}$, $\hat{\Sigma}^{(3)}$, $\hat{F}^{3MNK(3)}$, ... – aż do uzyskania zbieżności.
 - **[PROCEDURA ITERACYJNA]**

Plan prezentacji

- 1 Pośrednia MNK
- 2 Metoda zmiennych instrumentalnych
- 3 Podwójna MNK
- 4 Estymatory klasy k
- 5 Potrójna MNK
- 6 Metoda równań pozornie niepowiązanych**
- 7 MNW z pełną informacją (FIML)

SUR

- Można sobie wyobrazić pominięcie kroku 1 oraz 2.
- Ograniczałoby to 3MNK wyłącznie do kroku 3, czyli zastosowania UMNK do łącznego oszacowania wielu równań modelu z uwzględnieniem informacji o korelacjach między składnikami losowymi różnych równań.
- Taki estymator nazywamy SUR (ang. Seemingly Unrelated Regressions):
 - nie jest zgodny przy łącznej współzależności równań...
 - ...ale bywa przydatny w przypadku modeli prostych i rekurencyjnych...
 - ...zwłaszcza gdy zasadne jest nałożenie restrykcji wiążących parametry różnych równań

Plan prezentacji

- 1 Pośrednia MNK
- 2 Metoda zmiennych instrumentalnych
- 3 Podwójna MNK
- 4 Estymatory klasy k
- 5 Potrójna MNK
- 6 Metoda równań pozornie niepowiązanych
- 7 MNW z pełną informacją (FIML)

FIML (1)

- układ równań w postaci jak przy omawianiu 3MNK: $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \tilde{\mathbf{F}} + \boldsymbol{\varepsilon}$
- układ równań w postaci strukturalnej: $\mathbf{y} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \boldsymbol{\varepsilon}$
- składnik losowy $\boldsymbol{\varepsilon}$ (długości $T \cdot M$) ma macierz wariancji-kowariancji $\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_T$

Jeżeli poszczególne wektory $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ (i) są niezależne dla różnych t i (ii) mają wielowymiarowy **rozkład normalny** dla danego t , to ich łączna funkcja gęstości:

$$L_{\boldsymbol{\varepsilon}} = (2\pi)^{-\frac{M \cdot T}{2}} |\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_T|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_T)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \right]$$

Funkcja gęstości obserwacji i składnika losowego zależą od siebie. **Twierdzenie o zamianie zmiennych**: należy $L_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ pomnożyć przez $|\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{y}}| = |\mathbf{A}|$

$$L_y = L_{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot |\mathbf{A}|$$

$$L_y = (2\pi)^{-\frac{M \cdot T}{2}} |\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_T|^{-\frac{1}{2}} |\mathbf{A}| \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \right)^T (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_T)^{-1} \left(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \right) \right]$$

FIML (2)

Po zlogarytmowaniu:

$$l_y = -\frac{M \cdot T}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln |\Sigma| + T \cdot \ln |\mathbf{A}| - \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \right)^T (\Sigma \otimes \mathbf{I}_T)^{-1} \left(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{Z}} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \right) \right]$$

Oszacowanie FIML otrzymujemy, maksymalizując powyższe wyrażenie ze względu na nieznane wartości parametrów modelu: Σ , $\mathbf{A}$ oraz $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

LIML

LIML (ang. Limited Information Maximum Likelihood) to metoda estymacji parametrów pojedynczych równań, pokrewna do FIML. (*Vide podręcznik.*)

FIML vs 3MNK

	3MNK	FIML
3MNK	**	Przy jednoznacznej identyfikowalności – równoważne.
FIML	**	**

Zadania

8.8

Zadanie 8.8

Oszacuj 2MNK parametry strukturalne modelu:

$$y_{1t} = \alpha_{21} y_{2t} + \beta_{11} z_{1t} + \beta_{21} z_{2t} + \varepsilon_{1t},$$

$$y_{2t} = \alpha_{12} y_{1t} + \beta_{22} z_{2t} + \beta_{32} z_{3t} + \varepsilon_{2t},$$

dysponując następującymi informacjami:

a) macierz obserwacji na zmiennych z góry ustalonych:

$$Z = [z_{1(t)} : z_{2(t)} : z_{3(t)}] = \begin{bmatrix} 0,9 & 1 & 2,2 \\ 1,2 & 1 & 3,2 \\ 2,1 & 1 & 1,6 \\ 2,9 & 1 & 4,5 \\ 2,2 & 1 & 6,3 \end{bmatrix},$$

b) macierz obserwacji na zmiennych endogenicznych nieopóźnionych:

$$Y = [y_{1(t)} : y_{2(t)}] = \begin{bmatrix} 1,1 & 2,9 \\ 1,9 & 3,2 \\ 2,0 & 4,8 \\ 5,8 & 6,2 \end{bmatrix}.$$

Zadania

8.12

Zadanie 8.12

Dane są macierz zmiennych z góry ustalonych:

$$X = [x_{0it} : x_{1it} : x_{2it} : x_{3it}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz macierz obserwacji na zmiennych endogenicznych nieopóźnionych:

$$Y = [y_{1it} : y_{2it} : y_{3it}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Znajdź oceny parametrów strukturalnych następującego modelu:

$$y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 y_{2t} + \zeta_{1t},$$

$$y_{2t} = \beta_0 + \beta_1 x_{2t} + \beta_2 y_{3t} + \zeta_{2t},$$

$$y_{3t} = \gamma_0 + \gamma_1 x_{3t} + \gamma_2 y_{1t} + \zeta_{3t}$$

za pomocą 3MNK.