

Modele wielorównaniowe. Problem identyfikacji

Ekonometria Szeregów Czasowych – SGH

Andrzej Torój

Plan wykładu

- 1 Wprowadzenie
- 2 Trzy przykłady
- 3 Przykłady: interpretacja
- 4 Warunki identyfikowalności
- 5 Restrykcje na parametry stochastyczne
- 6 Zadania

Plan prezentacji

- 1 Wprowadzenie
- 2 Trzy przykłady
- 3 Przykłady: interpretacja
- 4 Warunki identyfikowalności
- 5 Restrykcje na parametry stochastyczne
- 6 Zadania

Prezentacja dostępna pod adresem

<http://web.sgh.waw.pl/~atoroj/>



Problem identyfikacji

Specyfikacja modelu	Estymacja	Identyfikacja parametrów postaci strukturalnej
$y_t \mathbf{A} + x_t \mathbf{B} = \varepsilon_t$	$y_t = x_t \underbrace{(-1) \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}}_{\Pi} + \underbrace{\varepsilon_t \mathbf{A}^{-1}}_{v_t}$	$-\mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} = \Pi$
postać strukturalna	postać zredukowana	postać strukturalna

Elementy macierzy B i A nie zawsze można zidentyfikować na podstawie macierzy Π . Z czego wynika ewentualny brak tej możliwości i pod jakimi warunkami identyfikacja jest możliwa?

Plan prezentacji

- 1 Wprowadzenie
- 2 Trzy przykłady
- 3 Przykłady: interpretacja
- 4 Warunki identyfikowalności
- 5 Restrykcje na parametry stochastyczne
- 6 Zadania

Przykład 1

Przykład 1

Rozważmy model konkurencyjnego rynku pozostającego w równowadze, składający się ze stochastycznych równań popytu i podaży oraz tożsamości będącej warunkiem równowagi:

$$\begin{cases} d_t = \alpha_0 - \alpha_1 p_t + \varepsilon_t^d \\ s_t = \beta_0 + \beta_1 p_t + \varepsilon_t^s \\ d_t = s_t (\equiv q_t) \end{cases}$$

gdzie d - popyt, s - podaż, $\alpha_1, \beta_1 > 0$, $\alpha_0 > \beta_0$. Zmienne endogeniczne to q_t i p_t . Po uwzględnieniu tożsamości zapisujemy postać strukturalną:

$$\begin{cases} q_t + \alpha_1 p_t - \alpha_0 = \varepsilon_t^d \\ q_t - \beta_1 p_t - \beta_0 = \varepsilon_t^s \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} q_t & p_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} + [1] \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t^d \\ \varepsilon_t^s \end{bmatrix}$$

Przykład 1

Postać zredukowana:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} q_t & p_t \end{bmatrix} &= \underbrace{-[1] \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 \end{bmatrix}}_{1 \times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}}_{2 \times 2}^{-1} + \\
 &\quad + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_t^d & \varepsilon_t^s \end{bmatrix}}_{1 \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}^{-1} = \\
 &= [1] \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \\
 \\
 \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}^{-1} = \\
 &= \frac{-1}{\alpha_1 + \beta_1} \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta_1 & -1 \\ -\alpha_1 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha_0 \beta_1 + \beta_0 \alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} & \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1 + \beta_1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Przykład 1

Rozważmy $\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} \alpha'_0 \\ \beta'_0 \\ \alpha'_1 \\ \beta'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Oba wektory mogłyby wynikać z oszacowania wektora parametrów postaci zredukowanej $\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Żaden z parametrów postaci strukturalnej nie jest identyfikowalny.

Przykład 2

Przykład 2

Równanie popytu w tym samym modelu uzupełniamy o dochód rozporządzalny konsumentów y_t z parametrem α_2 .

$$\begin{cases} d_t = \alpha_0 - \alpha_1 p_t + \alpha_2 y_t + \varepsilon_t^d \\ s_t = \beta_0 + \beta_1 p_t + \varepsilon_t^s \\ d_t = s_t (\equiv q_t) \end{cases}$$

Postać strukturalna:

$$\begin{cases} q_t + \alpha_1 p_t - \alpha_0 - \alpha_2 y_t = \varepsilon_t^d \\ q_t - \beta_1 p_t - \beta_0 = \varepsilon_t^s \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} q_t & p_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t^d & \varepsilon_t^s \end{bmatrix}$$

Przykład 2

Postać zredukowana:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} q_t & p_t \end{bmatrix} &= \underbrace{- \begin{bmatrix} 1 & y_t \end{bmatrix}}_{1 \times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix}}_{2 \times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}^{-1}}_{2 \times 2} + \\
 &\quad + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_t^d & \varepsilon_t^s \end{bmatrix}}_{1 \times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}^{-1}}_{2 \times 2} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & y_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_0 \beta_1 + \beta_0 \alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} & \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1 + \beta_1} \\ \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} & \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \beta_1} \end{bmatrix}$$



Przykład 2

Po rozszerzeniu specyfikacji parametry równania podaży stały się identyfikowalne:

$$\left\{ \underbrace{\frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1 + \beta_1}}_{\pi_{12}} \cdot \underbrace{(-\beta_1)}_{-\frac{\pi_{21}}{\pi_{22}}} + \underbrace{\frac{\alpha_0\beta_1 + \beta_0\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1}}_{\pi_{11}} = \beta_0 \right.$$

Przykład 2

Niech $\beta_0 = 1$ i $\beta_1 = 2$:
$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_1 + 2} & \frac{\alpha_0 - 1}{\alpha_1 + 2} \\ \frac{2\alpha_2}{\alpha_1 + 2} & \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + 2} \end{bmatrix}.$$

Zarówno dla $\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, jak i dla $\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$,

spełniona jest równość $\Pi = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Parametry równania popytu wciąż są zatem nieidentyfikowalne.

Przykład 3

Przykład 3

Równanie podaży z przykładu 2 uzupełniamy o zasób kapitału wśród producentów na rozważanym rynku:

$$\begin{cases} d_t = \alpha_0 - \alpha_1 p_t + \alpha_2 y_t + \varepsilon_t^d \\ s_t = \beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 r_t + \varepsilon_t^s \\ d_t = s_t (\equiv q_t) \end{cases}$$

Postać strukturalna:

$$\begin{cases} q_t + \alpha_1 p_t - \alpha_0 - \alpha_2 y_t = \varepsilon_t^d \\ q_t - \beta_1 p_t - \beta_0 - \beta_2 r_t = \varepsilon_t^s \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} q_t & p_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & y_t & r_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 \\ -\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_t^d & \varepsilon_t^s \end{bmatrix}$$

Przykład 3

Postać zredukowana:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} q_t & p_t \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} 1 & y_t & r_t \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 \\ -\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{bmatrix}}_{3 \times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}^{-1}}_{2 \times 2} + \\
 &\quad \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_t^d & \varepsilon_t^s \end{bmatrix}}_{1 \times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}^{-1}}_{2 \times 2} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & y_t & r_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \\ \pi_{31} & \pi_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \\ \pi_{31} & \pi_{32} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 \\ -\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_0 \beta_1 + \beta_0 \alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} & \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1 + \beta_1} \\ \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} & \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \beta_1} \\ \frac{-\alpha_1 \beta_2}{\alpha_1 + \beta_1} & \frac{\beta_2}{\alpha_1 + \beta_1} \end{bmatrix}$$

Przykład 3

β_0 i β_1 ustalamy jak wcześniej.

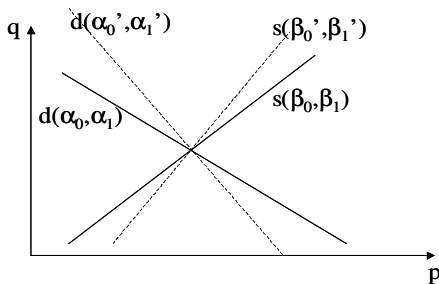
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -\frac{\pi_{31}}{\pi_{32}} \\ \beta_2 = \frac{\beta_2}{\underbrace{\alpha_1 + \beta_1}_{\pi_{32}}} \cdot \left(\underbrace{\alpha_1}_{-\frac{\pi_{31}}{\pi_{32}}} + \underbrace{\beta_1}_{\frac{\pi_{21}}{\pi_{22}}} \right) \\ \alpha_2 = \frac{\alpha_2}{\underbrace{\alpha_1 + \beta_1}_{\pi_{22}}} \cdot \left(\underbrace{\alpha_1}_{-\frac{\pi_{31}}{\pi_{32}}} + \underbrace{\beta_1}_{\frac{\pi_{21}}{\pi_{22}}} \right) \\ \alpha_0 = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\underbrace{\alpha_0 + \alpha_1}_{\pi_{12}}} \left(\alpha_0 + \underbrace{\alpha_1}_{-\frac{\pi_{31}}{\pi_{32}}} \right) + \underbrace{\beta_0}_{f(\Pi)} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi_{12}\alpha_1 + \beta_0}{1 - \pi_{12}} \end{array} \right.$$

Po rozszerzeniu specyfikacji również parametry równania popytu stały się identyfikowalne.

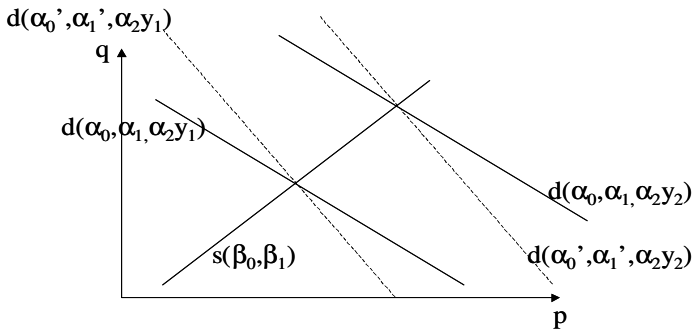
Plan prezentacji

- 1 Wprowadzenie
- 2 Trzy przykłady
- 3 Przykłady: interpretacja**
- 4 Warunki identyfikowalności
- 5 Restrykcje na parametry stochastyczne
- 6 Zadania

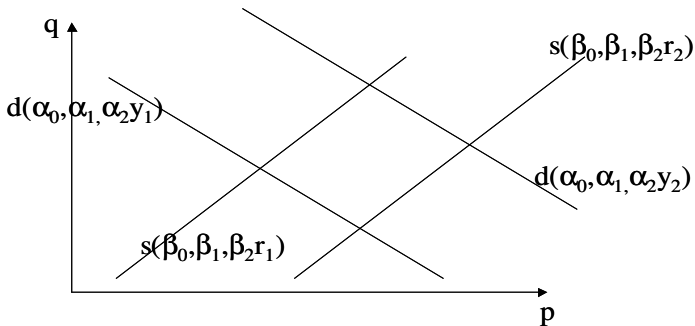
Przykład 1: ilustracja graficzna



Przykład 2: ilustracja graficzna



Przykład 3: ilustracja graficzna



Wnioski z przykładów

- 1 Brak identyfikowalności parametrów postaci strukturalnej wynika ze specyfikacji modelu.
- 2 Nie jest to w szczególności efekt zbyt krótkiej próby czy błędów w procesie estymacji.
- 3 Brak identyfikowalności parametrów postaci strukturalnej nie musi oznaczać, że model jest “zły”; oznacza jedynie, że na gruncie dostępnych danych nie jest możliwe ustalenie wartości poszczególnych jego parametrów.

Ewentualny brak identyfikowalności dotyczy wszystkich parametrów danego równania (por. przykłady 1, 2, 3). Stąd mówimy o identyfikowalności równań, a gdy wszystkie równania są identyfikowalne - o identyfikowalności modelu.

Plan prezentacji

- 1 Wprowadzenie
- 2 Trzy przykłady
- 3 Przykłady: interpretacja
- 4 Warunki identyfikowalności**
- 5 Restrykcje na parametry stochastyczne
- 6 Zadania

Liczba identyfikowanych parametrów

Liczba parametrów postaci strukturalnej

$$\underbrace{A_{M \times M}}_{M^2} + \underbrace{B_{K \times M}}_{KM} + \underbrace{\Sigma_{\varepsilon; M \times M - \text{symetryczna}}}_{M(M+1) \cdot \frac{1}{2}}$$

Liczba parametrów postaci zredukowanej

$$\underbrace{\Pi_{K \times M}}_{KM} + \underbrace{\Sigma_{\nu; M \times M - \text{symetryczna}}}_{M(M+1) \cdot \frac{1}{2}}$$

≥

Różnica wynosi maksymalnie M^2 .

W przykładzie 3 osiągnięcie identyfikowalności wymagało przyjęcia $M^2 = 4$ dodatkowych założeń:

- 1 o normalizacji ze względu na zmienną q_t w pierwszym i drugim równaniu, stąd $A_{11} = 1$ i $A_{12} = 1$;
- 2 o wykluczeniu niektórych zmiennych z niektórych równań, stąd $B_{22} = 0$ i $B_{31} = 0$.

A set of small navigation icons typically found in Beamer presentations, including symbols for back, forward, search, and other slide controls.

Model w postaci zredukowanej

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{j,t} & \tilde{y}_{j,t} & \tilde{\tilde{y}}_{j,t} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_{j,t} & \tilde{\tilde{x}}_{j,t} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_t} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \tilde{M}_j & \tilde{\tilde{M}}_j \\ \underbrace{\tilde{d}_j}_{\tilde{d}_j} & \underbrace{D^{(1)}}_{D^{(3)}} & \underbrace{D^{(2)}}_{D^{(4)}} \} \tilde{K}_j \\ \underbrace{\tilde{\tilde{d}}_j}_{\tilde{\tilde{d}}_j} & & \end{bmatrix}}_{\Pi} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_{j,t} & \tilde{v}_{j,t} & \tilde{\tilde{v}}_{j,t} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_t}$$

Ponieważ $\Pi = -BA^{-1}$ czyli $\Pi A = -B$, dla j -tej kolumny macierzy A i B możemy zapisać:

$$\Pi \mathbf{A}_{[:,j]} = -\mathbf{B}_{[:,j]}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{d}_j & D^{(1)} & D^{(2)} \\ \tilde{\tilde{d}}_j & D^{(3)} & D^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{A}}_{[:,j]} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{B}}_{[:,j]} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{d}}_j + \mathbf{D}^{(1)} \tilde{\mathbf{A}}_{[:,j]} = -\tilde{\mathbf{B}}_{[:,j]} \\ \tilde{\tilde{\mathbf{d}}}_j + \mathbf{D}^{(3)} \tilde{\mathbf{A}}_{[:,j]} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \tilde{K}_j \text{ rownan} \\ \tilde{\tilde{K}}_j \text{ rownan} \end{array} \text{ z } \tilde{M}_j \text{ parametrami}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}^{(3)} \tilde{\mathbf{A}}_{[:,j]} = -\tilde{\tilde{\mathbf{d}}}_j \\ \tilde{\mathbf{B}}_{[:,j]} = -\tilde{\mathbf{d}}_j - \mathbf{D}^{(1)} \tilde{\mathbf{A}}_{[:,j]} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \tilde{\tilde{K}}_j \text{ rownan z } \tilde{M}_j \text{ niewiadomymi (*)} \\ \text{wzór na pozostałe } \tilde{K}_j \text{ parametrow} \end{array}$$

Dla każdego równania ($\forall_j$) możliwe są następujące przypadki:

- 1 $\tilde{\tilde{K}}_j < \tilde{M}_j \Rightarrow$ nieskończenie wiele rozwiązań, parametry postaci strukturalnej równania j nie są identyfikowalne;
- 2 $\tilde{\tilde{K}}_j = \tilde{M}_j \Rightarrow$ dokładnie jedno rozwiązanie, identyfikowalność jednoznaczna;
- 3 $\tilde{\tilde{K}}_j > \tilde{M}_j \Rightarrow$ identyfikowalność nadmierna, można testować czy sprzeczności są istotne statystycznie.

Warunek konieczny identyfikowalności

Warunkiem koniecznym identyfikowalności równania j jest $\tilde{K}_j \geq \tilde{M}_j$, tzn. by liczba zmiennych egzogenicznych nie występujących w tym równaniu była przynajmniej taka, jak liczba zmiennych endogenicznych występujących w tym równaniu jako zmienne objaśniające.

Przykłady (c.d.):

- ① $\tilde{K}_1 = 0 < \tilde{M}_1 = 1$ – brak identyfikowalności równania 1
 $\tilde{K}_2 = 0 < \tilde{M}_2 = 1$ – brak identyfikowalności równania 2
- ② $\tilde{K}_1 = 0 < \tilde{M}_1 = 1$ – brak identyfikowalności równania 1
 $\tilde{K}_2 = 1 = \tilde{M}_2 = 1$ – równanie 2 jest identyfikowalne
- ③ $\tilde{K}_1 = 1 = \tilde{M}_1 = 1$ – równanie 1 jest identyfikowalne
 $\tilde{K}_2 = 1 = \tilde{M}_2 = 1$ – równanie 2 jest identyfikowalne

Fakt: Warunek konieczny identyfikowalności jest spełniony dla wszystkich równań modelu, jeżeli w każdym z nich występuje “własna”, unikalna zmienna egzogeniczna.

Warunkiem wystarczającym istnienia jednoznacznego rozwiązania układu równań (*) jest nie tylko $\tilde{K}_j = \tilde{M}_j$, lecz również pełen rząd kolumnowy (liniowa niezależność wszystkich kolumn) macierzy $D^{(3)}$:

$$r\left(\mathbf{D}^{(3)}\right)=\tilde{M}_j$$

Wniosek: warunek wystarczający identyfikowalności j -tego równania zawiera w sobie warunek konieczny, bowiem przy $\tilde{K}_j < \tilde{M}_j$ liczba wierszy macierzy $D^{(3)}$ jest niższa od liczby kolumn, a taka macierz nie może mieć $\tilde{M}_j$ kolumn liniowo niezależnych.

Metoda z tabelą

W praktyce spełnienie warunku koniecznego można również badać korzystając z następującej metody:

- ❶ Zapisujemy parametry postaci strukturalnej (tzn. takiej, w której wszystkie zmienne z parametrami są po jednej stronie znaku równości) w tabeli, w której wiersze odpowiadają zmiennym endogenicznym (równaniom), a kolumny - wszystkim zmiennym w modelu (parametry przyporządkowujemy tym zmiennym).
- ❷ W celu sprawdzenia identyfikowalności parametrów j -tego równania wykreślamy z tabeli:
 - ❶ wiersz odpowiadający temu równaniu (j);
 - ❷ kolumny odpowiadające zmiennym, które są w tym równaniu ($y_{j,t}$, $\tilde{y}_{j,t}$, $\tilde{x}_{j,t}$).
- ❸ Sprawdzamy, czy macierz parametrów, która pozostała po wykreśleniach, ma tyle liniowo niezależnych kolumn, ile wierszy.

Metoda z tabelą – przykłady 1, 2, 3

1	$\begin{cases} d_t = \alpha_0 - \alpha_1 p_t + \varepsilon_t^d \\ s_t = \beta_0 + \beta_1 p_t + \varepsilon_t^s \\ d_t = s_t \end{cases}$		1	d_t	s_t	p_t	
			α_0	-1	0	$-\alpha_1$	
			β_0	0	-1	β_1	
			0	1	-1	0	

dla równania 1: $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, dla równania 2: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 2 wiersze > 1 wektor - brak identyfikowalności obu równań

Metoda z tabelą

2	$\begin{cases} d_t = \alpha_0 - \alpha_1 p_t + \alpha_2 y_t + \varepsilon_t^d \\ s_t = \beta_0 + \beta_1 p_t + \varepsilon_t^s \\ d_t = s_t \end{cases}$	1	d_t	s_t	p_t	y_t
		α_0	-1	0	$-\alpha_1$	α_2
		β_0	0	-1	β_1	0
		0	1	-1	0	0

dla równania 1: $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 2 wiersze > 1 wektor - brak identyfikowalności; dla
 równania 2: $\begin{bmatrix} -1 & \alpha_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2 wektory liniowo niezależne - równanie
 identyfikowalne

Metoda z tabelą

3	$\begin{cases} d_t = \alpha_0 - \alpha_1 p_t + \alpha_2 y_t + \varepsilon_t^d \\ s_t = \beta_0 + \beta_1 p_t + \beta_2 r_t + \varepsilon_t^s \\ d_t = s_t \end{cases}$	1	d_t	s_t	p_t	y_t	r_t
		α_0	-1	0	$-\alpha_1$	α_2	0
		β_0	0	-1	β_1	0	β_2
		0	1	-1	0	0	0

dla równania 1: $\begin{bmatrix} -1 & \beta_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, dla równania 2: $\begin{bmatrix} -1 & \alpha_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 2 wektory liniowo niezależne - oba równania identyfikowalne

Plan prezentacji

- 1 Wprowadzenie
- 2 Trzy przykłady
- 3 Przykłady: interpretacja
- 4 Warunki identyfikowalności
- 5 Restrykcje na parametry stochastyczne
- 6 Zadania

Przykład 1 (c.d.)

Założmy, że $\Sigma_\epsilon = \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & \sigma_s^2 \end{bmatrix}$. Wówczas

$$\begin{aligned} \Sigma_v &= \begin{bmatrix} \sigma_{v,1,1}^2 & \sigma_{v,1,2}^2 \\ \cdot & \sigma_{v,2,2}^2 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^{-1})^T \Sigma_\epsilon \mathbf{A}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} & \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} \\ \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} & \frac{-1}{\alpha_1 + \beta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & \sigma_s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1} & \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1} & \frac{-1}{\alpha_1 + \beta_1} \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^2 \begin{bmatrix} \beta_1^2 \sigma_d^2 + \alpha_1^2 \sigma_s^2 & \beta_1 \sigma_d^2 - \alpha_1 \sigma_s^2 \\ \cdot & \sigma_d^2 + \sigma_s^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2 z 3 równości wykorzystujemy do ustalenia σ_d^2 oraz σ_s^2 , trzecia zaś ustanawia zależność między α_1 a β_1 . Ta zależność oraz dwie równości $\pi_1 = \dots$ i $\pi_2 = \dots$ (por. wcześniej) to wciąż za mało, by zidentyfikować 4 parametry postaci strukturalnej.

Przykład 2 (c.d.)

Wykorzystajmy założenie $\Sigma_\epsilon = \begin{bmatrix} \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & \sigma_s^2 \end{bmatrix}$ w drugim modelu. Po uwzględnieniu trzeciej zależności między α_1 i β_1 możemy zidentyfikować 3 parametry równania popytu na podstawie 3 równań.

Założmy, że wyniki estymacji parametrów postaci zredukowanej modelu 2 uzupełnimy o wyniki estymacji wariancji-kowariancji wektora składników losowych postaci zredukowanej $\mathbf{v}_t$:

$$\Sigma_v = \begin{bmatrix} \sigma_{v,1,1}^2 & \sigma_{v,1,2}^2 \\ \cdot & \sigma_{v,2,2}^2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} \right)^2 \begin{bmatrix} \beta_1^2 \sigma_d^2 + \alpha_1^2 \sigma_s^2 & \beta_1 \sigma_d^2 - \alpha_1 \sigma_s^2 \\ \cdot & \sigma_d^2 + \sigma_s^2 \end{bmatrix}.$$
 Zgodnie z dotychczasowymi ustaleniami, $\beta_0 = 1$ i $\beta_1 = 2$. Możemy zatem zapisać 3 dodatkowe równania:

$$\sigma_{v,1,1}^2 = \left(\frac{1}{\alpha_1 + 2} \right)^2 (4\sigma_d^2 + \alpha_1^2 \sigma_s^2)$$

$$\sigma_{v,1,2}^2 = \left(\frac{1}{\alpha_1 + 2} \right)^2 (2\sigma_d^2 - \alpha_1 \sigma_s^2)$$

$$\sigma_{v,2,2}^2 = \left(\frac{1}{\alpha_1 + 2} \right)^2 (\sigma_d^2 + \sigma_s^2)$$

Wyznaczamy z ostatniego równania σ_s^2 i podstawiamy do pozostałych dwóch:

$$\sigma_{v,1,1}^2 = \left(\frac{1}{\alpha_1 + 2} \right)^2 \left(4\sigma_d^2 + \alpha_1^2 \left(\sigma_{v,2,2}^2 (\alpha_1 + 2)^2 - \sigma_d^2 \right) \right) =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_1 + 2} \right)^2 \left(4 - \alpha_1^2 \right) \sigma_d^2 + \alpha_1^2 \sigma_{v,2,2}^2 = \frac{2 - \alpha_1}{2 + \alpha_1} \sigma_d^2 + \alpha_1^2 \sigma_{v,2,2}^2$$

$$\sigma_{v,1,2}^2 = \left(\frac{1}{\alpha_1 + 2} \right)^2 \left(2\sigma_d^2 - \alpha_1 \left(\sigma_{v,2,2}^2 (\alpha_1 + 2)^2 - \sigma_d^2 \right) \right) =$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_1 + 2} \right)^2 \left(2 + \alpha_1 \right) \sigma_d^2 - \alpha_1 \sigma_{v,2,2}^2 = \frac{1}{2 + \alpha_1} \sigma_d^2 - \alpha_1 \sigma_{v,2,2}^2$$

Z układu można wyrugować σ_d^2 :

$$\sigma_{v,1,1}^2 - \alpha_1^2 \sigma_{v,2,2}^2 = (2 - \alpha_1) \left(\sigma_{v,1,2}^2 + \alpha_1 \sigma_{v,2,2}^2 \right) =$$

$$2\sigma_{v,1,2}^2 + 2\alpha_1 \sigma_{v,2,2}^2 - \alpha_1 \sigma_{v,1,2}^2 - \alpha_1^2 \sigma_{v,2,2}^2$$

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_{v,1,1}^2 - 2\sigma_{v,1,2}^2}{2\sigma_{v,2,2}^2 - \sigma_{v,1,2}^2}$$

Niech (z wyników estymacji) $\Sigma_v = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ \cdot & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$. Wówczas

$$\alpha_1 = \frac{3-2 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = 2.$$
 Pozostałe dwie równości z przykładu 2 pozwalają

zidentyfikować $\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Restrykcje stochastyczne

Do identyfikowalności mogą też prowadzić inne, liniowe i nieliniowe restrykcje nakładane na parametry stochastyczne i strukturalne.

Plan prezentacji

- 1 Wprowadzenie
- 2 Trzy przykłady
- 3 Przykłady: interpretacja
- 4 Warunki identyfikowalności
- 5 Restrykcje na parametry stochastyczne
- 6 Zadania

Zadanie 1

Dany jest następujący model ekonometryczny:

$$\begin{aligned}y_{1,t} &= 1 + 0,5y_{2,t} + x_{1,t} + 0,1x_{2,t} + \varepsilon_{1,t} \\ y_{2,t} &= 2 - 2y_{1,t} + 0,5y_{1,t-1} + \varepsilon_{2,t}\end{aligned}$$

- 1 Omów identyfikowalność poszczególnych równań modelu.
- 2 Przedstaw przykład takiej zmiany (takich zmian) specyfikacji, które doprowadziłyby do jednoznacznej identyfikowalności wszystkich równań.
- 3 Przedstaw przykład takiej zmiany (takich zmian) specyfikacji, które doprowadziłyby do braku identyfikowalności przynajmniej jednego z równań.

Zadanie 2

Zaproponowano następujący model wielorównaniowy:

$$y_{1,t} = \alpha_0 + \alpha_1 y_{2,t} + \alpha_2 x_{1,t} + \alpha_3 x_{3,t} + \varepsilon_{1,t}$$

$$y_{2,t} = \beta_0 + \beta_1 y_{1,t} + \beta_2 x_{2,t} + \varepsilon_{2,t}$$

- 1 Przeprowadź analizę identyfikowalności pierwszego równania.
- 2 Przeprowadź analizę identyfikowalności drugiego równania.
- 3 Czy do estymacji powyższego modelu można zastosować pośrednią MNK?
- 4 Zaproponuj taką zmianę specyfikacji, która sprawi, że oba równania staną się jednoznacznie identyfikowalne.